

# Segmentation d'images

Luc Brun

28 avril 2011

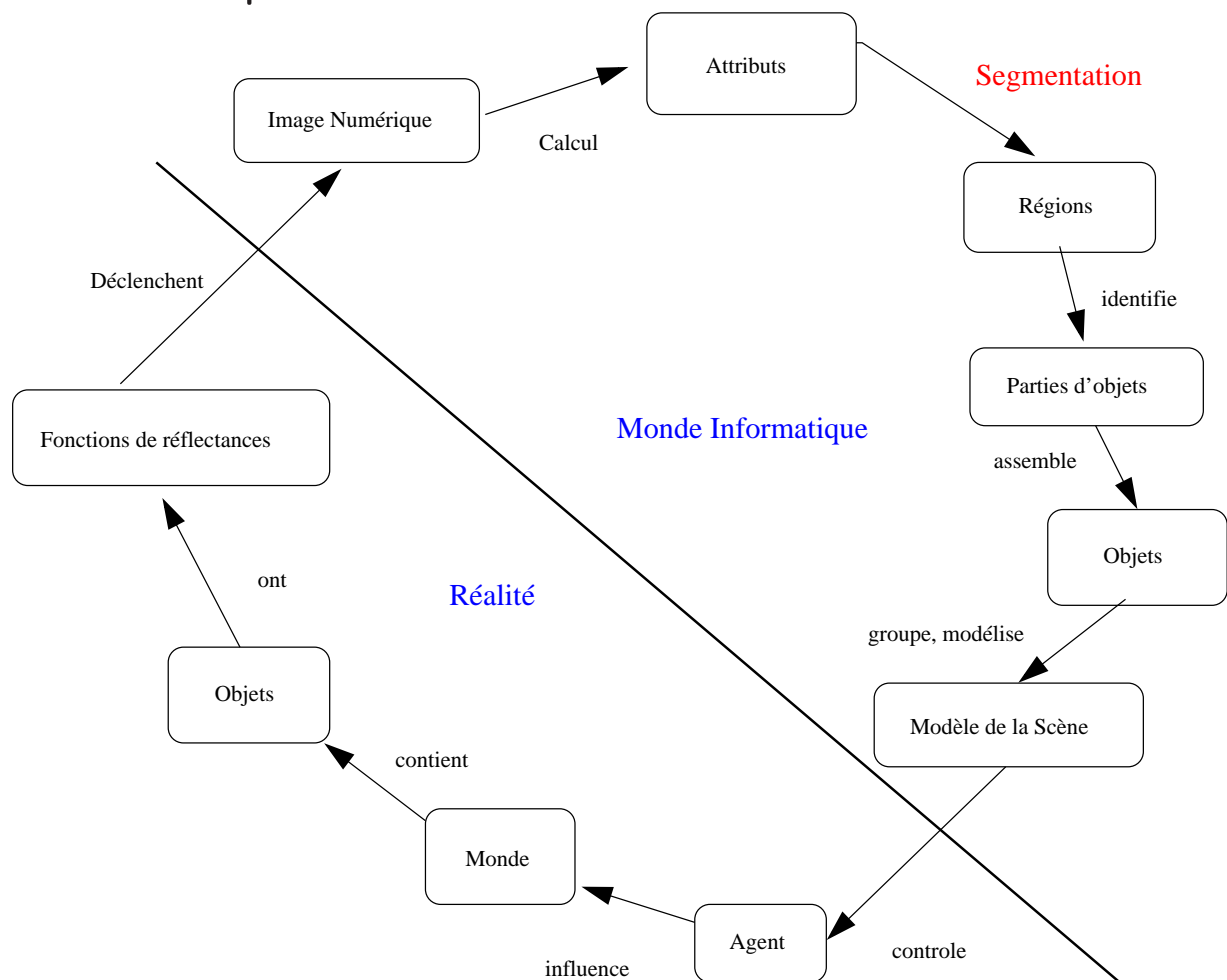
## Références utilisées

- Analyse d'images : filtrage et segmentation, J.-P. Cocquerez et S. Philipp Editions Masson
- Segmentation d'images à base topologiques, Thèse de doctorat, Luc Brun

<http://www.greyc.ensicaen.fr/~luc/ARTICLES/these>

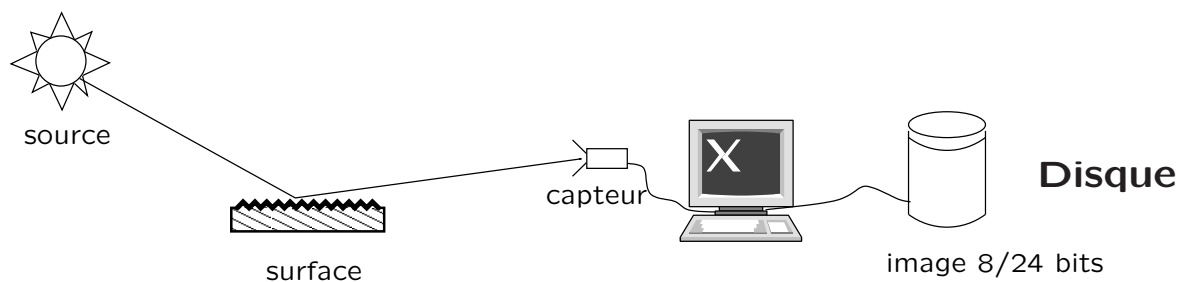
Voir les chapitres 4, 5 et 2

# Place de la segmentation dans un processus de vision



Le premier niveau d'abstraction d'un système de vision

## Fonctions de Réflectance



Connaissant :

- Les paramètres et la position de la source
- Les paramètres de la surface
- Les paramètres et la position de la caméra

Calculer l'intensité (ou la couleur) de chaque pixel.

## Fonctions de réflectance

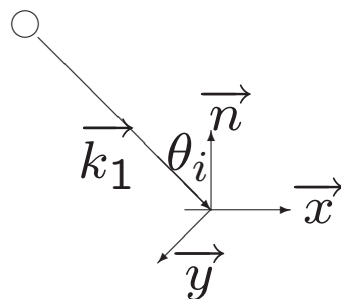
### Le modèle lambertien

Modèle encore mal expliqué. Explication usuelle :

*Le rayon pénètre dans la surface où il est réfléchi aléatoirement. Une partie des rayons “ressortent” de la surface selon des directions aléatoires.*

$$I \approx K_{dl} \cdot \cos(\theta_i)$$

$\theta_i$  angle entre la normale et le rayon incident.  
 $K_{dl}$  constante du lobe diffus (composante lambertienne)



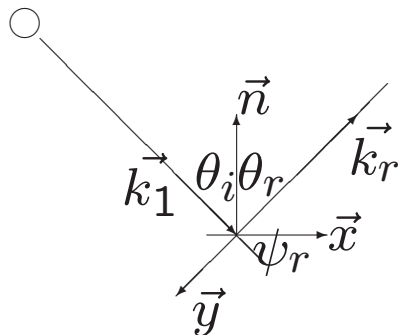
# Fonctions de réflectance

## Le lobe spéculaire

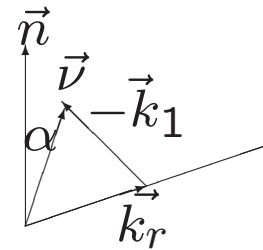
Deux explications :

- Par l'électromagnétisme (Modèle de Beckman)
- Par l'optique géométrique (Modèle de Torrance-Sparrow)

L'intensité est fonction de la source, de la normale et de l'observateur.



$\vec{k}_r$  rayon réfléchi



$$\vec{v} = \vec{k}_r - \vec{k}_1$$

$$I \approx K_{sl} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma$  : rugosité du matériaux.  $K_{sl}$  constante du lobe spéculaire.

## Fonctions de réflectance

### Le pic spéculaire

Direction spéculaire :  $\alpha = 0$

$\vec{n}$  est la médiatrice de  $\vec{k}_r$  et  $-\vec{k}_i$ .

Phénomène modélisé uniquement par les modèles physiques (Beckman) phénomène en :

$$\frac{\sin(\nu_x)}{\nu_x} \cdot \frac{\sin(\nu_y)}{\nu_y} \approx \delta(\theta_i - \theta_r) \delta(\psi_r)$$

$\delta$  : fonction de dirac ( $\delta(0) = 1, \delta(x) = 0 \forall x \neq 0$ )

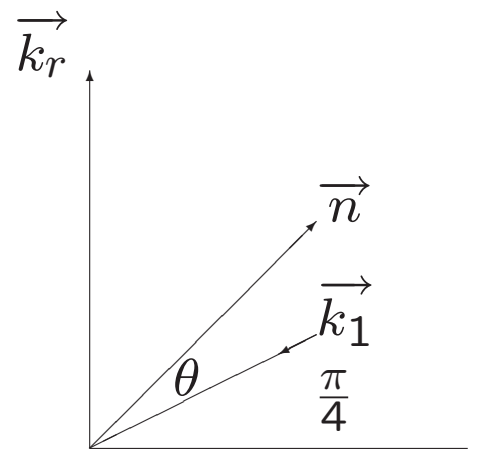
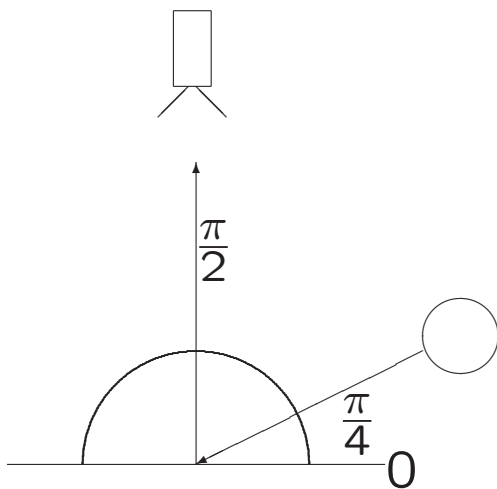
$$I \approx K_{ss} \delta(\theta_i - \theta_r) \delta(\psi_r)$$

## Fonctions de réflectance

## Récapitulatif

$$I = K_{dl} \cos(\theta_i) + K_{sl} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} + K_{ss} \delta(\theta_i - \theta_r) \delta(\psi_r)$$

Application : Éclairage d'une sphère (en fait un cercle) :



Calculer  $I(\theta)$

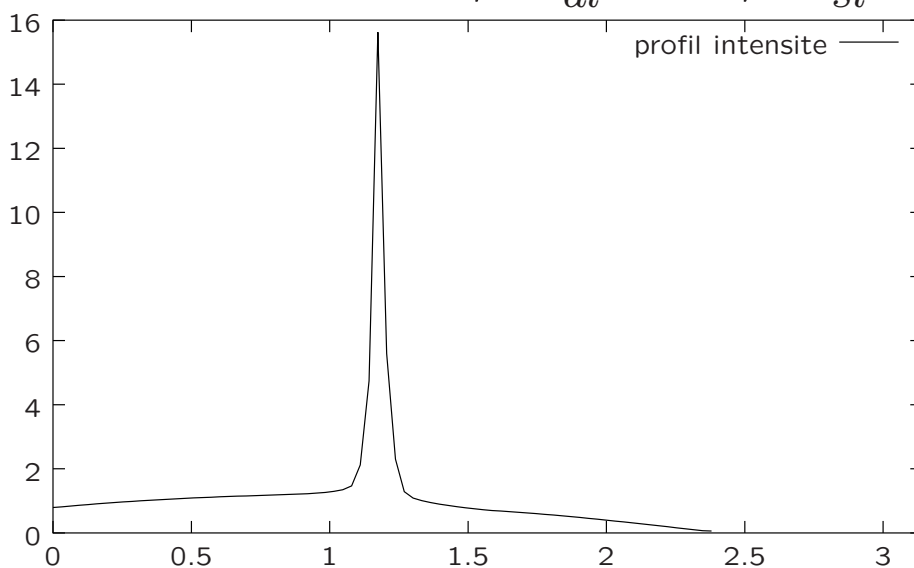


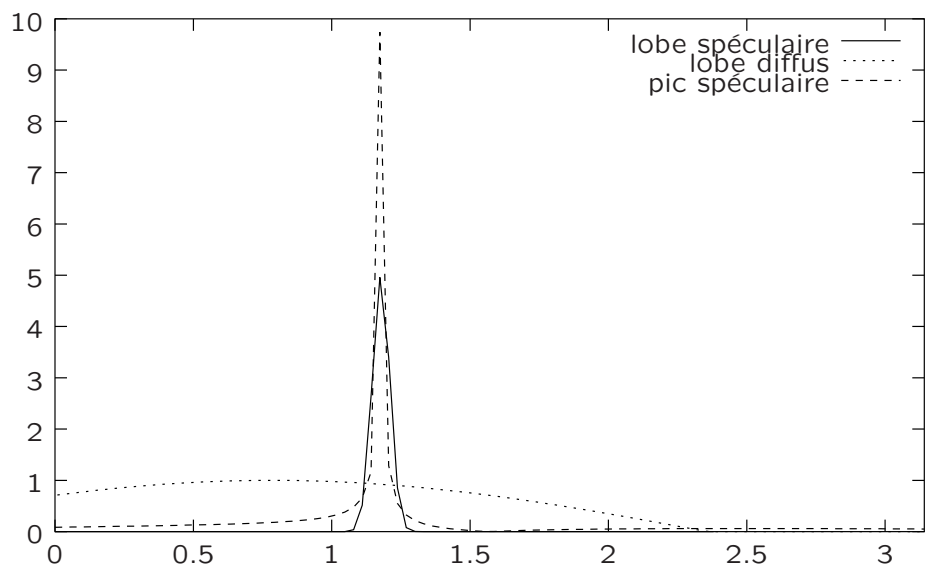
## Fonctions de réflectance

### Récapitulatif (Solution)

$$I(\theta) = K_{dl} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + K_{sl} e^{-\frac{(x - \frac{3\pi}{8})^2}{2\sigma^2}} + K_{ss} \delta\left(x - \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\text{AN : } \sigma = 10^{-2}, K_{dl} = 1, K_{sl} = 5, K_{ss} = 10$$





## Définition de la segmentation

Horowitz et Pavlidis 1976

Soient :

- $X$  le domaine de l'image.
- $I$  la fonction qui associe à chaque pixel une valeur  $I(x,y)$ .
- $P$  un prédicat d'homogénéité défini sur l'ensemble des parties de  $X$ .

La segmentation  $S$  de  $X$  est définie comme une partition de  $X$  en  $n$  sous-ensembles  $\{R_1, \dots, R_n\}$  tels que :

1.  $X = \bigsqcup_{i=1}^m R_i$

La segmentation  $S$  de  $X$  est une partition

2.  $\forall i \in \{1, \dots, n\} R_i$  est connexe.

en composantes connexes

3.  $\forall i \in \{1, \dots, n\} P(R_i) = \text{vrai}$

dont toute région est au moins homogène

4.  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j / R_i$  est adjacent à  $R_j$   
 $\Rightarrow P(R_i \cup R_j) = \text{faux}$

et qui ne peut être décomposé plus avant sans créer des régions dont la fusion resterait homogène.

## Les différentes façons de considérer une image

- Un processus stochastique.
- Un vecteur aléatoire ( $I[0, 0], I[0, 1], \dots, I[n, m]$ ) si la taille de l'image  $I$  est  $n \times m$ .
- Une surface 3D (dans le cas d'un signal mono-dimensionnel).
- Un ensemble de données liées par des contraintes géométriques.
- La discrétisation d'un signal continu.
- ...

## Les deux principales approches

1. L'approche région : Définir des mesures de similarité entre pixels  
→ recherche de l'ensemble des pixels d'une région.
2. L'approche contour : Définir des mesures de dis-similarité entre pixels  
→ recherche des frontières entre les régions.

## L'approche contours

L'image est considérée comme la discrétisation d'un signal continu :

$$I = Q \circ f$$

- $I$  est l'image discrète,
- $f$  le signal continu ( $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  : Images en niveaux de gris),
- $Q$  un opérateur d'échantillonnage.

Différentielle de  $f$  :

$$\begin{aligned} Df(p) \cdot \vec{n} &= \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot n_x + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot n_y \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p) - f(p + (hn_x, hn_y))}{h} \end{aligned}$$

Seule la direction de  $n$  compte

$$\rightarrow \|\vec{n}\| = 1$$

## L'approche contours

Utilisation du gradient :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$Df(p) \cdot \vec{n} = \nabla f(p) \bullet n$$

Où  $\bullet$  désigne le produit scalaire.

De plus :

$$\max_{\|\vec{n}\|=1} |Df(p) \cdot \vec{n}| = \max_{\|\vec{n}\|=1} |\nabla f(p) \bullet \vec{n}| = \|\nabla f(p)\|$$

En tout point la norme du gradient permet de connaître la variation maximum de la différentielle. Le maximum étant atteint pour  $\vec{n}$  colinéaire à  $\nabla f(p)$  la direction du gradient donne la direction de plus grande variation de la fonction  $f$ .

## L'approche contours

Fort gradient  $\Rightarrow$  présence de contour (peut être non maximum).

Maximum local de la différentielle première  $\rightarrow$  zéro de la différentielle seconde.

$$D_2f(p).\vec{n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p).n_x.n_x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p).n_y.n_y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p).n_x n_y$$

Extremum de  $Df(p).\vec{n}$  en  $\vec{n} \Rightarrow$  zéros de  $D_2f(p).\vec{n}$  en  $\vec{n}$ .



## L'approche contours

### Utilisation du Laplacien

$$\Delta f(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)$$

Le Laplacien étant invariant par rotation, le calcul des zéros du Laplacien ne fait pas intervenir la direction  $n$  de plus grande variation de  $Df(p)$ . L'utilisation du Laplacien évite donc de calculer le gradient en plus de la différentielle seconde.

Attention !!

$$\Delta f(p) = 0 \not\Rightarrow \exists \vec{n} / D_2 f(p) \cdot \vec{n} = 0$$

Coïncidence uniquement si (Marr 1980) : les variations d'intensité sont linéaires sur la ligne de passage par zéro et sur les lignes parallèles dans un voisinage de  $p$ . Le laplacien peut donc être vu comme une bonne approximation de la différentielle seconde.

## L'approche contours

### Les opérateurs de convolution

Diminution du bruit  $\rightarrow$  convolution avec un filtre passe bas.

$$\begin{aligned} f * g(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)g(x - u, y - v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - u, x - v)g(u, v)dudv \end{aligned}$$

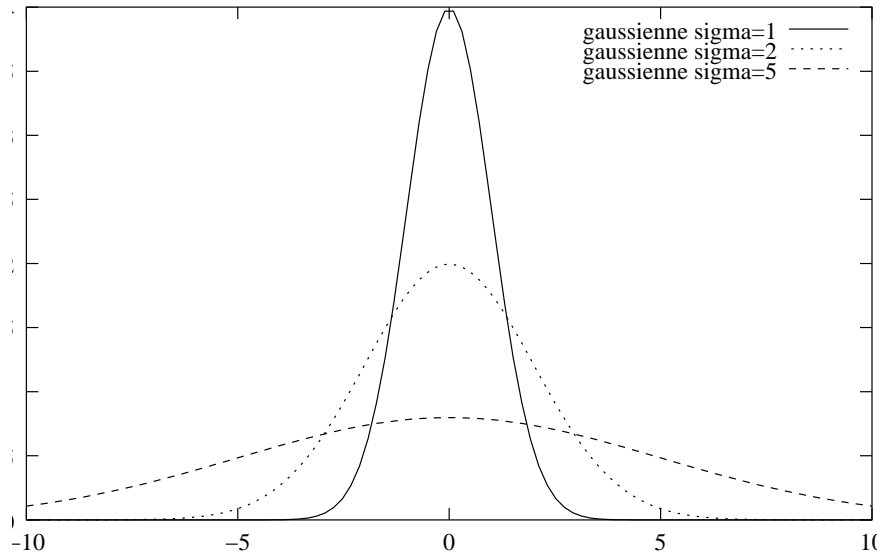
La Gaussienne :

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Le paramètre  $\sigma$  contrôle l'aplatissement de la Gaussienne et permet donc de contrôler la puissance du filtre. Une forte valeur de  $\sigma$  induit un fort lissage et vice-versa.

## L'approche contours

### La Gaussienne



La convolution d'un signal avec la Gaussienne s'effectue en limitant celle-ci à un support fini  $[-M_\epsilon, M_\epsilon]$  avec :

$$\forall x \in [-M_\epsilon, M_\epsilon] \quad G(x) > \epsilon$$

$M_\epsilon$  : fonction croissante de  $\sigma$

→ Plus on veut lisser plus il faut élargir le support

1. Approche Pyramidale.
2. Filtres récursifs

## L'approche contours

### Séparabilité

$$G(x, y) = \frac{1}{\sigma^2(2\pi)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

$$G(x, y) = G(x)G(y)$$

La convolution de la fonction 2D  $f$  avec  $G$  donne donc :

$$\begin{aligned} f * G(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u, y-v) G(u, v) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u, y-v) G(u) G(v) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u, y-v) G(v) dv \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) (f *_y G)(x-u, y) du \end{aligned}$$

$$f * G(x, y) = (G *_x (f *_y G))(x, y)$$

où  $*_x$  et  $*_y$  représentent les convolutions par rapport aux variables  $x$  et  $y$ .

## L'approche contours

### Séparabilité (suite)

$$f * G(x, y) = (G *_{x} (f *_{y} G)) (x, y)$$

Utilisation de deux masques 1D de taille  $[-M_{\epsilon}, M_{\epsilon}]$  plutôt qu'un masque 2D de taille  $[-M_{\epsilon}, M_{\epsilon}]^2$

→ complexité  $\mathcal{O}(2|I||M|)$  plutôt que  $\mathcal{O}(|I||M|^2)$ .

- $|I|$  : taille de l'image
- $|M|$  : taille du masque

## L'approche contours

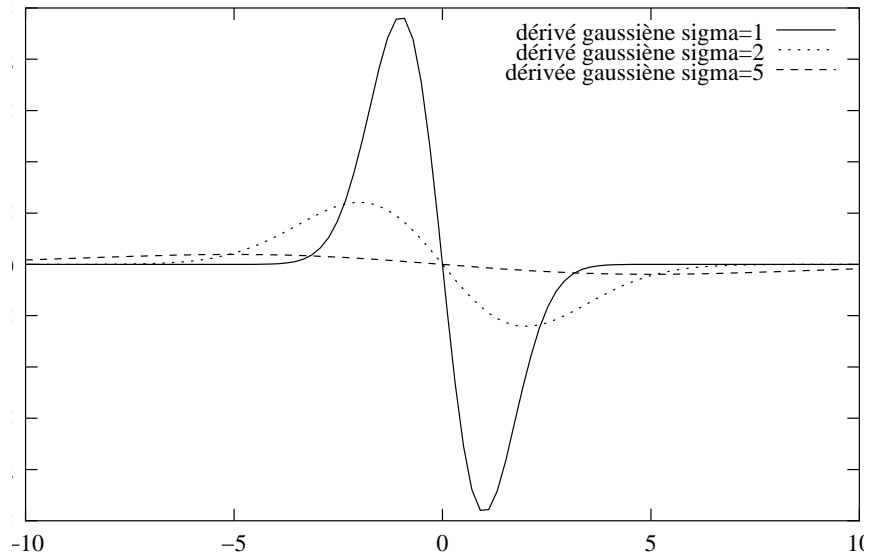
### Utilisation de la convolution

$$(f * g)^{(k)} = (f^{(k)}) * g = f * (g^{(k)})$$

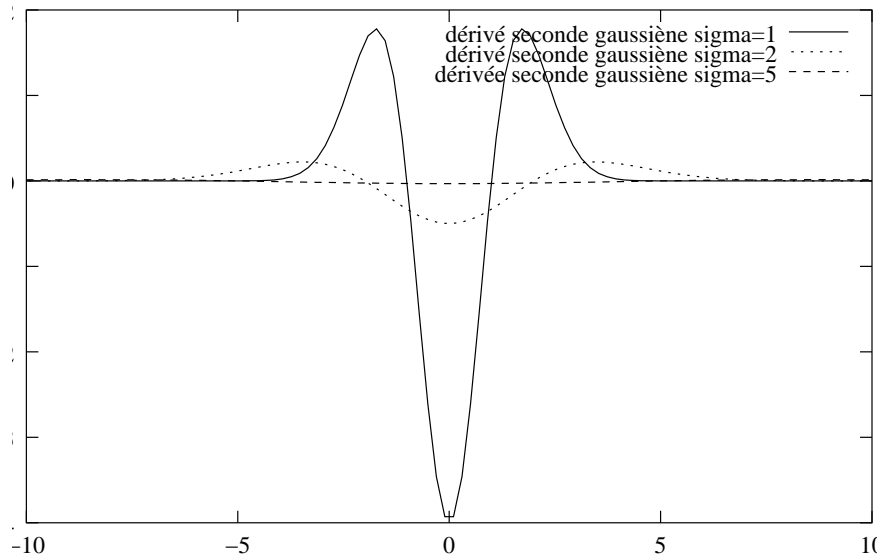
Plutôt que de lisser  $f$  et calculer son gradient, on le convolu avec la dérivé d'une Gaussienne (pré-calculé). De même, le calcul du Laplacien s'effectue en convoluant  $f$  avec le Laplacien d'une Gaussienne.

# L'approche contours

## Utilisation de la convolution



## Dérivée de la gaussienne.



## Dérivée seconde de la gaussienne.

## L'approche contours

### Passage au discret

Approximation des dérivées : Différences finies  
(Taylor)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(i, j) \approx \frac{\Delta I}{\Delta i}(i, j) = I(i + 1, j) - I(i, j)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(i, j) \approx 2I(i, j) - I(i + 1, j) - I(i - 1, j)$$

Convolution avec des masques discrets :

$$M * I(i, j) = \sum_{k=-p}^p \sum_{l=-q}^q M[k][l] I[i - k][j - l]$$



## L'approche contours

### Exemples de masques

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérateurs de Sobel(lissage) :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Opérateurs de Prewitt(approximation polynômial de surface) :

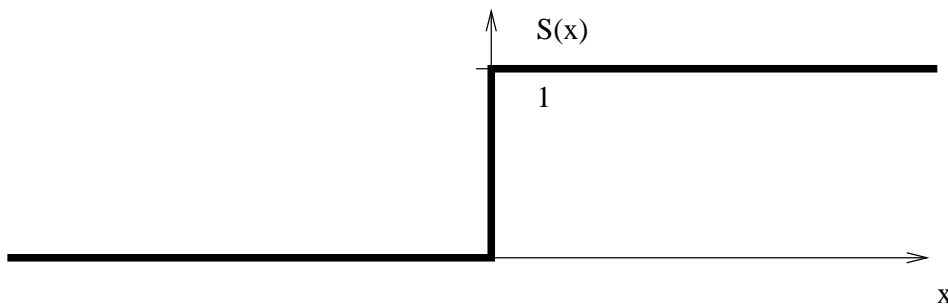
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

## L'approche contours

### Les opérateurs optimaux Canny 86

Modélisation d'un contour

$$C(x) = S_0 S(x) + B(x)$$



L'opérateur optimal  $h$  convolé avec  $C$  doit avoir un maximum en zéro et permettre[Canny86] :

1. Une bonne détection
2. Une bonne localisation
3. Une faible multiplicité des maxima dûs au bruit.

$$\rightarrow 2h(x) - 2\lambda_1 h^{(2)}(x) + 2\lambda_2 h^{(3)}(x) + \lambda_3 = 0$$

## L'approche contours

### Les opérateurs optimaux

#### Deriche 87

Canny : Contrainte support finie :

$$h(0) = 0 ; h(M) = 0 ; h'(0) = S ; h'(M) = 0$$

→ Fonction complexe à implémenter.

Deriche 87 : Même équation, support infini :

$$h(0) = 0 ; h(+\infty) = 0 ; h'(0) = S ; h'(+\infty) = 0$$

$$\Rightarrow h(x) = ce^{-\alpha|x|} \sin \omega x$$

Meilleurs résultats pour ( $\omega \approx 0$ )

$$h(x) = c\omega x e^{-\alpha|x|} = Cx e^{-\alpha|x|}$$

Lissage :

$$l(x) = \int_0^x h(x) dx = b(\alpha|x| + 1)e^{-\alpha|x|}$$

$\alpha$  contrôle le lissage (même rôle que  $\sigma$ )

## L'approche contours

### Les opérateurs optimaux Deriche 87(suite)

Utilisation de la transformée en  $z \rightarrow$  implémentation récursive. Exemple : convolution de  $x(i)$  avec  $l(i)$  (résultat dans  $y$ )

$$\begin{array}{l} \text{Pour } m = 1, \dots, M \\ y^+(m) = a_0x(m) + a_1x(m-1) - b_1y^+(m-1) - b_2y^+(m-2) \\ \text{Pour } m = M, \dots, 1 \\ y^-(m) = a_2x(m+1) + a_3x(m+2) - b_1y^-(m+1) - b_2y^-(m+2) \\ \text{Pour } m = 1, \dots, M \\ y(m) = y^+(m) + y^-(m) \end{array}$$

$M$  : taille du signal. Coefficients  $a_i$  et  $b_i$  déduits du paramètre  $\alpha$ .

8 opérations quelque soit  $\alpha$ .

Avantages des filtres de Deriche :

1. Formalisation de la notion de contour
2. Temps de calculs indépendants de  $\alpha$ .
3. Pas de coupure du filtre

## L'approche contours

Les opérateurs optimaux  
Deriche 87(Exemples)



Image Originale



$\alpha = 1$



$\alpha = 5$



$\alpha = 10$

Remarque : Résultats similaires avec les opérateurs de Shen-Castan 89

## L'approche contours

### Gradient Couleur

$$f \left( \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) \end{array} \right)$$

Différentielle de  $f$  en  $p$  :

$$Df(p).(n_x, n_y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p).n_x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(p).n_y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p).n_x + \frac{\partial f_2}{\partial y}(p).n_y \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(p).n_x + \frac{\partial f_3}{\partial y}(p).n_y \end{pmatrix}$$

Norme de la différentielle au carré :

$$\begin{aligned} S(p, \vec{n}) &= \|Df(p).(n_x, n_y)\|^2 \\ &= En_x^2 + 2Fn_xn_y + Gn_y^2 \end{aligned}$$

avec :

$$E = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 \quad F = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial y} \quad G = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^2$$

L'approche contours

Gradient Couleur  
(suite)

$$S(p, \vec{n}) = En_x^2 + 2Fn_xn_y + Gn_y^2$$

Si  $\vec{n} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ , maximum de  $S(p, \vec{n})$   
pour :

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2F}{E - G} \right)$$

Maximum correspondant

$\lambda(x, y) =_{not} S(p, (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)))$  :

$$\lambda(x, y) = \frac{E + G + \sqrt{(E - G)^2 + 4F^2}}{2}$$

$\lambda$  égal au carré de la norme du gradient dans  
le cas mono-dimensionnel.

## L'approche contours

### Laplacien Couleur

Différentielle de  $S(p, \vec{n})$  :

$$D_S(p) \cdot \vec{n} = E_x(p)n_x^3 + (2F_x(p) + E_y(p))n_x^2n_y \\ + (G_x(p) + 2F_y(p))n_xn_y^2 + G_y(p)n_y^3$$

$E_x, E_y, F_x, F_y$  et  $G_x, G_y$  : dérivées partielles de  $E, F$  et  $G$  par rapport à  $x$  et  $y$ .

$$D_S(p) \cdot \vec{n} \approx \text{Laplacien}$$

Références :

Zenzo 86, Cumani 89, 91



## L'approche contours

### Calcul des contours :

Utilisation de la norme du gradient :

1. Calculer le gradient en chaque point
2. Créer l'image de la norme du gradient
3. Extraire les maxima locaux dans la direction du gradient.
4. Effectuer un seuillage à effet hystérésis de l'image des maxima locaux.

Seuillage à effet hystérésis : Ne conserver que :

1. Les points dont la norme du gradient est supérieure à un seuil haut ( $sh$ )
2. Les points dont la norme du gradient est supérieure à un seuil bas ( $sb$  avec  $sb < sh$ ) et appartenant à un bout de contour dont au moins un point possède une norme du gradient supérieure à  $sh$ .

## L'approche contours

### Calcul des contours :

Utilisation de la différentielle seconde :

- Calculer  $D_2f(p) \cdot \vec{n}$  pour tout point  $p$  de l'image  
( $\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ )
- Rechercher les passages par zéro de  $D_2f(p) \cdot \vec{n}$  dans la direction  $\vec{n}$ .
- Créer l'image des passages par zéro et de la norme du gradient.
- Effectuer un seuillage à effet hystérésis de l'image des maxima locaux.

## L'approche contours

### Calcul des contours :

Utilisation du Laplacien :

- Calculer le Laplacien.
- Rechercher les passages par zéro.
- Créer l'image des passages par zéro et de la norme du gradient.
- Effectuer un seuillage à effet hystérésis de l'image des maxima locaux.

## L'approche contours

### Les contours actifs

Minimisation de l'énergie d'une courbe  $C : v(s), s \in [0, 1]$ .

$$E(C) = E_{interne}(C) + E_{image}(C)$$

- $E_{interne}(C)$  : Contraintes internes à la courbe. Permet de régulariser la solution.
- $E_{image}(C)$  : Energie de l'image. Généralement liée au gradient.

$$E(C) = \int_0^1 F_{interne}(s) + F_{image}(s) ds$$

$F_{interne,image}$  : Forces appliquées en chaque point de la courbe.

## L'approche contours

### Les contours actifs (L'Énergie interne)

Généralement 2 types de forces :

- Forces de tensions :  $\frac{\partial v}{\partial s}$
- Forces de courbures :  $\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

$$E_{interne}(C) = \int_0^1 \alpha(s) \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 + \beta(s) \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right\|^2 ds$$

$\alpha(s), \beta(s)$  : Coefficients de pondération

## L'approche contours

### Les contours actifs (L'Énergie de l'image)

Issue d'une force dans la direction du gradient  $\nabla I$  et proportionnelle à celui ci.

$$E_{image} = - \int_0^1 \|\nabla I(v(s))\|^2 ds$$

⇒ Énergie totale :

$$E(C) = \int_0^1 \alpha(s) \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 + \beta(s) \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right\|^2 - \|\nabla I(v(s))\|^2 ds$$

## L'approche contours

### Les contours actifs (Résolution)

Trois type de méthodes :

- Algorithmes gloutons : Chaque point est bougé en fonction de la somme des forces.
- Programmation dynamique : Le déplacement d'un point n'influence que ces deux voisins.
- Résolution de système : On tient compte de toutes les influences

–

- Problèmes dans les zones sans informations de gradient.
- Les choix des coefficients de pondération influencent de manière importante l'évolution du contour : Difficile à fixer a priori.

Méthodes principalement utilisées pour le suivi d'objets.

## L'approche contours

### Conclusion

- Méthodes extrêmement rapides
- Pré-traitement pour (par ex.) des algorithmes de fermeture de contour.
- Difficulté du choix d'un seuil pertinent.
  - Trop de lissage → perte de détails
  - Pas assez → détection de bruit.
- Critère extrêmement local (pas de concept de régions)



L'approche Région

## L'approche région

### Définition d'Horowitz

1.  $X = \sqcup_{i=1}^m R_i$
2.  $\forall i \in \{1, \dots, n\} R_i$  est connexe.
3.  $\forall i \in \{1, \dots, n\} P(R_i) = \text{vrai}$
4.  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j / R_i$  est adjacent à  $R_j$   
 $\Rightarrow P(R_i \cup R_j) = \text{faux}$

### Subdivision en trois grandes familles

1. Les méthodes descendantes (Utilisation de (3))
2. Les méthodes ascendantes (Utilisation de (4))
  - Méthodes d'agrégation
  - Méthodes de fusion
3. Les méthodes Mixtes (Utilisation de (3) et (4))

L'approche région  
Les méthodes descendantes

Notion de multi-ensemble

I une image avec  $n$  composantes par pixels

→ Multi-ensemble  $(C, f)$

–  $C \subset \mathbb{R}^n$  ensemble des valeurs prises par les pixels

–  $f(c)$  nombre de pixels de l'image de valeur  $c$ .

Vision probabiliste :

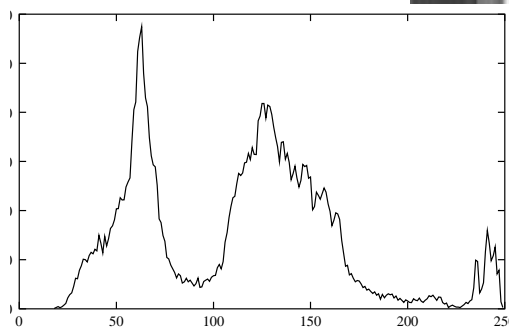
–  $p(c) = \frac{1}{|I|} f(c)$  : probabilité qu'un pixel ait la valeur  $c$

– Si  $C' \subset C$ ,  $\frac{1}{|I|} \sum_{c \in C'} f(c)$  probabilité que la valeur d'un pixel appartienne à  $C'$ .

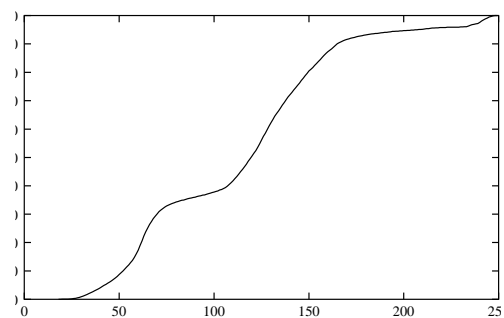
L'approche région  
Les méthodes descendantes

Notion de multi-ensemble  
Cas du niveau de gris

Si  $I$  en niveau de gris  $C \subset [0, 255]$ .



Histogramme



Histogramme cumulé.

# L'approche région

## Les méthodes descendantes

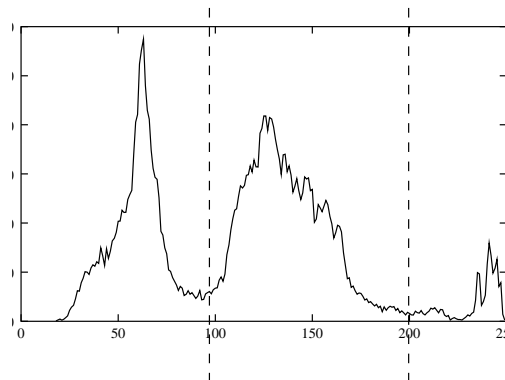
### Les méthodes de division

Découpe de l'histogramme  $[m, M]$  par un ensemble de seuils  $T_0, \dots, T_n$ .

Exemple :



Fille



Définition des seuils.

Deux seuils  $T_0 \approx 100, T_1 \approx 200$  :



## L'approche région Les méthodes descendantes

### Les méthodes de division

#### Classification des méthodes de seuillage :

- Seuillages globaux basés uniquement sur l'histogramme.
- Seuillages locaux basés
  - sur l'histogramme,
  - sur un voisinage de chaque point de l'image.
- Seuillages dynamiques, tiennent simultanément compte
  - De l'histogramme
  - Du voisinage des points
  - De la position d'un point dans l'image.

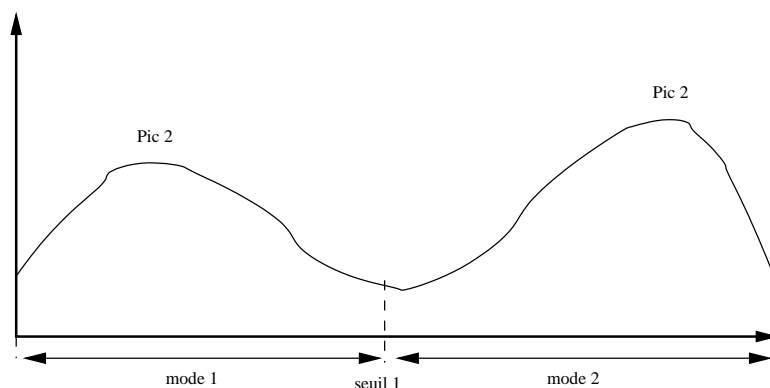
L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division  
Seuillages globaux

## Deux Familles

1. Décomposition en pics et vallées
2. Homogénéité des multi-ensembles.

Décomposition en pics et vallées : Somme d'histogrammes à distribution Gaussienne.

$$h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sigma_i} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \text{ avec } \mu_1 < \mu_2 \cdots < \mu_n$$



L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division  
Seuillages globaux

Décomposition en pics et vallées

Définitions d'un seuil :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(s) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s) > 0$$

**Bhattacharya-67** : limite supérieure de décroissance  
de  $\ln(h(n)) - \ln(h(n-1))$   $n \in [m, M]$ .

**Bartel 79** : Approximation des modes par des  
fonctions Gaussiennes(amélioration itérative).

**Papamarkos 94** :

1. Détermination des pics
2. Approximation des vallées par des fonctions rationnelles

**Witkin 84** : Lissage avec un filtre passe-bas  
→ seuils fonction du paramètre de lissage  
(cf [Lim 90] et [Celenk 90]).



L'approche région  
 Les méthodes descendantes  
 Les méthodes de division  
 Seuillages locaux

## Décomposition segments homogènes

Erreur quadratique :

$$\begin{aligned}
 EQ(C) &= \sum_{x \in C} \|x - \mu\|^2 = |C| \sum_{i=1}^n var_i \\
 EQ([T_i, T_{i+1}]) &= \sum_{x \in [T_i, T_{i+1}]} (x - \mu)^2 \\
 &= |T_{i+1} - T_i| var([T_i, T_{i+1}])
 \end{aligned}$$

Erreur de Partition :

$$E(N) = \sum_{i=1}^N EQ(C_i)$$

Minimisation de  $E(N) \rightarrow$  Régions de valeur constantes

Qualité de la partition :

$$\beta(N) = E(N) \Delta(N) \text{ avec } \Delta(N) = \sum_{i=1}^N \|\mu_i - \mu_0\|^2$$

$\Delta(1) = 0$ ,  $E(M) = 0 \rightarrow$  existence d'au moins un maximum :  $\exists N / E(N) = \Delta(N)$  [Ca79].

L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division

Seuillages locaux  
Classification bayésienne itérative  
[Mardia 88]

Effectuer une partition initiale de l'histogramme en  $N$  classes.

1. Calculer  $\mu_i$  et  $|C_i|$  pour chaque classe.
2. Extraire les composantes connexes de chaque classe.
3. Déterminer le filtre  $\gamma_i$  minimisant  $var(C_i)$  (possibilité de prendre la moyenne).
4. Calculer les seuils

$$s_{ij} = \frac{\mu_i + \mu_j}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_i - \mu_j} \ln \frac{|C_j|}{|C_i|}$$

5. Lisser l'image avec  $\gamma$  et réaffecter les pixels à chaque classe.
6. Retour en 1 tant que non stabilité.

L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division

Seuillages locaux  
Méthode de Relaxation gradient  
[Bhanu 82,87]

Adaptée aux images uni-modale.

$$\forall p \begin{cases} I(p) \in C_1 \Rightarrow |I(V_8(p)) \cap C_1| > |I(V_8(p)) \cap C_2| \\ I(p) \in C_2 \Rightarrow |I(V_8(p)) \cap C_2| > |I(V_8(p)) \cap C_1| \end{cases}$$

Vecteur de probabilité d'appartenance :

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_{C_1}(s) \\ P_{C_2}(s) \end{pmatrix} \text{ avec } P_{C_1}(s) + P_{C_2}(s) = 1$$

Vecteur de compatibilité :

$$Q(s) = \begin{pmatrix} Q_{C_1}(s) \\ Q_{C_2}(s) \end{pmatrix} \text{ avec } Q_{C_i}(s) = \frac{1}{8} \sum_{t \in V_8(s)} P_{C_i}(t)$$

Maximiser :

$$J = \sum_{i=1}^M {}^t P(s_i) Q(s_i)$$

L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division

Seuillages locaux/dynamiques  
Méthode de Watanabe 74

Seuils → frontières entre les régions → fort gradient.

$$d(z) = \sum_{s / I(s)=z} \|\nabla I(s)\|$$

Seuil ↔  $d(z)$  max.

L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division

Seuillages dynamiques  
Méthode de Hertz 88

Calcul de deux images binaires :

- IG : Image de gradient seuillé
- IS :
  - Décomposition de l'image en blocs
  - Calcul de seuils sur chaque bloc
  - Calcul des composantes connexes associées.
  - Marquage à 1 des pixels frontières

Calcul de  $ID = IG - IS$  et modification des seuils :

- Si  $Nb(-1)$  grand et  $Nb(+1)$  grand : bon nombre de seuils mais mal placés.
- Si  $Nb(-1) \ll Nb(+1)$  : faux seuil. Eliminer le seuil le moins significatif.
- Si  $Nb(+1) \gg Nb(-1)$  seuil absent. Introduire un nouveau seuil.

L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division

Seuillages dynamiques  
Binarisation, Méthode de Nakagawa 79

1. Découper l'image en bloc
2. Faire l'hypothèse bi-modale dans chaque bloc → seuil  $s$  solution de :

$$\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)s^2 + 2\left(\frac{\mu_2}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_1}{\sigma_2^2}\right)s - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + 2\ln\left(\frac{p_2\sigma_1}{p_1\sigma_2}\right) = 0$$

Si non bimodal :

seuil = Moyenne pondérée des seuils des blocs voisins.

3. Construire l'image des seuils :  
 $S[p]$  : Moyenne pondérée des seuils des blocs.
4. Construire l'image seuillée  $IB$  :

$$IB[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{si } I[p] > S[p] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Possibilité d'extension à trois Gaussiennes (Choux, Kaneko 72)

L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division

Seuillages globaux  
Extension à la couleur

Notion de projection d'un multi-ensemble :

La **projection** de  $(C, f) \in \mathcal{ME}_n$  sur l'axe vectoriel défini par le vecteur  $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$  est égale à  $([m, M], F) \in \mathcal{ME}_1$  avec :

$$\begin{aligned} m &= \min_{v \in C} v \cdot \vec{n}, \quad M = \max_{v \in C} v \cdot \vec{n} \\ D_t &= \{v \in C / v \cdot \vec{n} = t\} \\ F(t) &= \sum_{v \in D_t} f(v) \end{aligned}$$

Si  $T_0$  est un seuil de  $([m, M], F)$  :

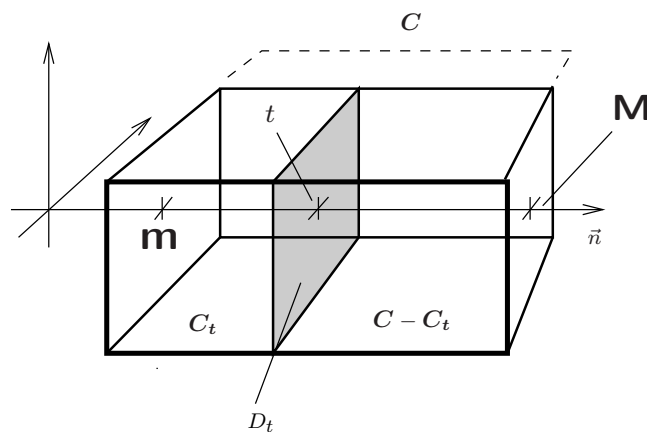
$(C, f) = (C_t, f) \cup (C - C_t, f)$  avec :

$$C_t = \{v \in C / v \cdot \vec{n} \leq t\}$$

L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division

Seuillages globaux  
Extension à la couleur

Notion de projection d'un multi-ensemble :  
Illustration





L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division

Seuillages globaux  
Extension à la couleur

Méthodes utilisant les projections 1D :

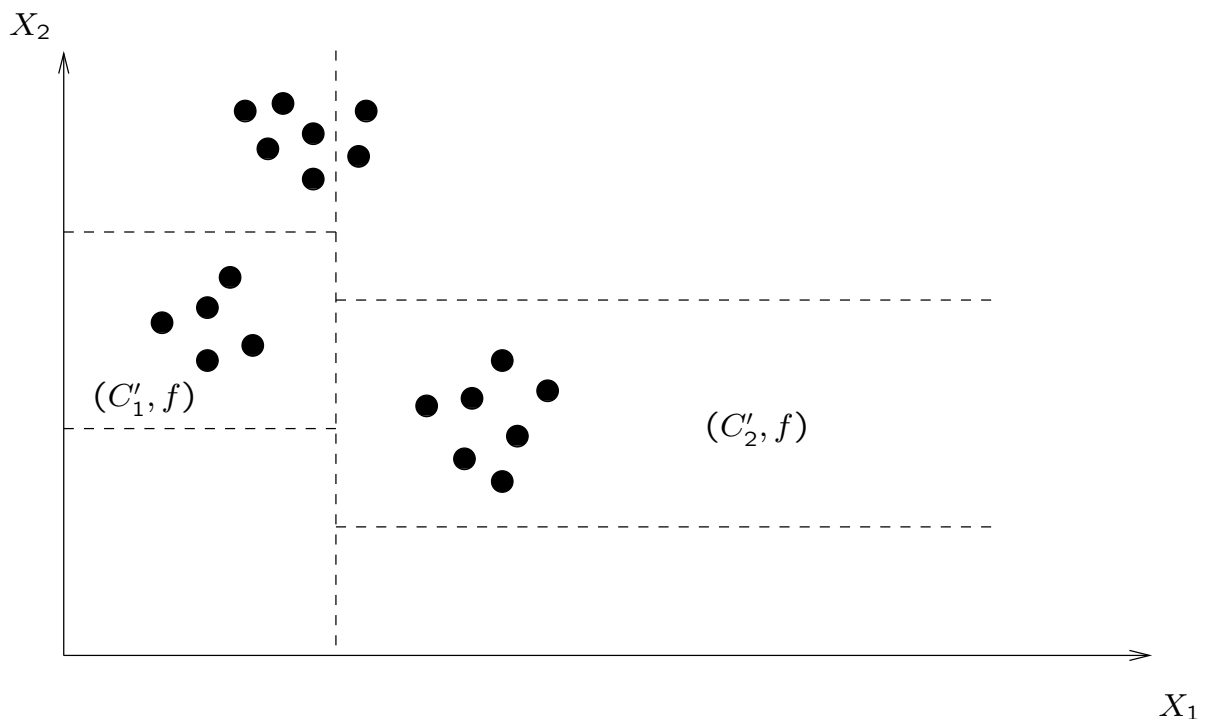
- Projection sur l'axe principal (de plus forte variance).  
Exemple : Ohlander 75 (+approximation binomiale)
- Projection sur les axes de coordonnées.

**Ohlander 78 :**

Détermination de seuils sur chaque axe puis découpe suivant l'axe possédant les meilleurs seuils.

## Celenk 90 :

1. Découper  $(C, f)$  sur  $X_1$   
 $\rightarrow (C_1, f)$  et  $(C_2, f)$
2. Calculer les projections de  $(C_1, f)$  sur  $X_2$  et  $X_3$
3. Découper récursivement  $(C_1, f)$  sur  $X_2$  et  $X_3$  en ne retenant que les "meilleurs" modes  $\rightarrow (C'_1, f)$ .
4. Faire de même avec  $(C_2, f)$ .
5.  $(C, f) = (C, f) - (C'_1, f) \cup (C'_2, f)$ . Continuer tant que modes significatifs



L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division

Seuillages globaux  
Extension à la couleur

Découpe 3D :

### Nuées dynamiques

1. Choisir au hasard  $K$  éléments  $(v_1, \dots, v_K)$
2. Affecter chaque élément de  $(C, f)$  au  $v_i$  le plus proche  $\rightarrow ((C_1, f), \dots, (C_K, f))$ .
3. Calculer la moyenne  $\mu(C_i)$  de chaque  $(C_i, f)$ .
4. Définir  $(w_1, \dots, w_K)$  tel que  $w_i$  est l'élément de  $(C, f)$  le plus proche de  $\mu(C_i)$ .
5. Si  $\exists v_i / v_i \neq w_i$ , itérer avec  $(w_1, \dots, w_K)$ .

Utilisation de seuil :

$$\max_{i \in \{1, \dots, K\}} \|v_i - w_i\| < \epsilon$$

Convergence vers le minimum local le plus proche de la solution initiale

## Quantification 3D :

- Méthodes Top-down [Heckbert, Wu...]  
Découpe récursive du multi-ensemble initial. Possibilité de définir des critères d'arrêt tels que  $\beta$ .
- Méthodes Bottom-up : Xiang...
  1. Initialisation de  $K$  multi-ensembles "vides"
  2. Affectation de chaque couleur à son multi-ensemble le plus proche.

## Sommets - Bassins :

- Mathas 90 : Trouver les points de fréquence maximale.

15	← 11	9	→ 20
↓			
30	← 12	6	9
↑		↓	↓
3	12	15	18
	↓	↓	
20	→ 30	→ 35	← 11

- Bonnet-Herbin : Estimation de la fonction de densité de probabilité suivie d'une

estimation des modes par bassins versants inversés.

## L'approche région Les méthodes descendantes

### Les méthodes de division

Récapitulatif :

- Prise en compte de la globalité de l'image  $\neq$  méthodes de contours.
- Image  $\rightarrow$  multi-ensemble : perte d'information
  - $\Rightarrow$  Très difficile de distinguer les petites régions ou de segmenter les régions comportant de grandes variations.

Recherche des détails  $\rightarrow$  Méthodes de division récursive

L'approche région  
Les méthodes descendantes  
Les méthodes de division

Les méthodes de division récursive

1. Calculer le multi-ensemble de l'image.
2. Partitionner le multi-ensemble.
3. Calculer la partition de l'image induite par la partition du multi-ensemble.
4. Pour chaque région ainsi définie calculer son multi-ensemble.
5. Si un multi-ensemble généré en 4 est partitionnable, revenir en 2.

Principe de la focalisation d'attention.

Problème : Irréversibilité des découpes.

Références : Ohlander 78, Coleman 79, Iee 90, Celenk 90

## L'approche région Les méthodes ascendantes

### Les méthodes agrégation

Deux étapes :

1. Sélection d'un ensemble de germes( utilisation du gradient, de la variance. . .)
2. Croissance des germes : Affecter itérativement chaque pixel de l'image à un germe.

Utilisation d'une fonction Oracle( $p, g$ ).

A l'étape  $k$  définition de l'oracle à partir des :

- attributs de  $p$ ,
- attributs de  $g$ ,
- attributs de  $g$  à l'étape  $k - 1$ .



## Exemple des Watersheeds (Ligne de partage des eaux)

1. Obtenir une image des gradients.
2. Germes : pixels de plus bas gradient. Marquer ces pixels.
3. A l'étape  $i$  :
  - Sélectionner les pixels non marqués de plus bas gradient.
  - Marquer les pixels sélectionnés.
  - Agréger à un germe tout pixel sélectionné et adjacent à celui-ci.
  - Initialiser de nouveaux germes à partir des pixels sélectionnés restant.
4. Répéter le point 3 tant qu'il reste des pixels non marqués.

# L'approche région

## Les méthodes ascendantes

### Les méthodes d'Agrégation/Fusion

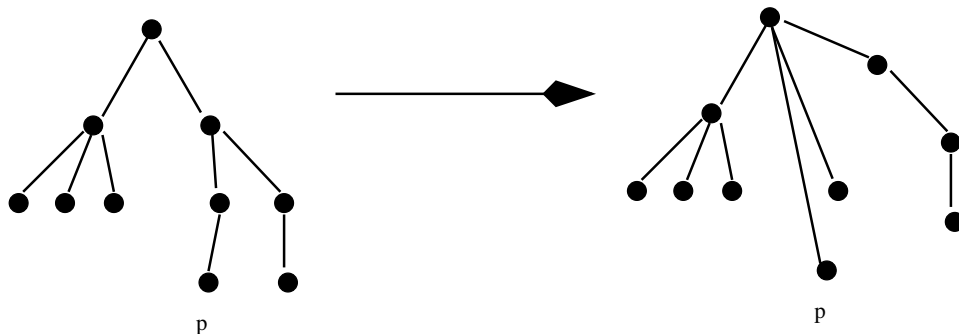
**Méthodes d'agrégation** : Régions initiales d'un pixel.

**Méthodes de fusion** : Taille des régions initiales supérieure à un pixel.

Exemple des méthodes d'Unir-Trouver :

Codage des régions par des arbres → Choix d'un élément canonique.

Union de régions : Union d'arbres

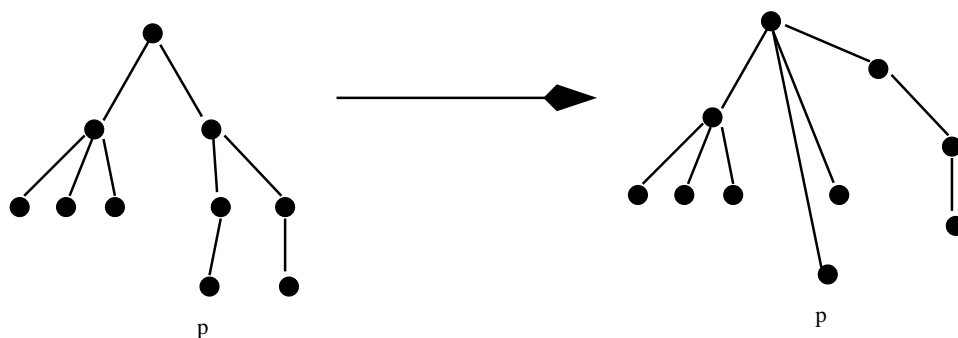


## Les méthodes Unir-Trouver

Retrouver le pixel canonique d'une région :

```
TrouveComprime(p)
{
  si ( racine(p) )
    return p ;
  sinon
  {
    p.parent = TrouveComprime(p.parent)
    return p.parent
  }
}
```

**Algorithme 1:** *Compression de chemins*



## Les méthodes Unir-Trouver

```
Segmente(Image I)
{
  Initialiser chaque pixel comme la racine
  d'un arbre (un germe)
  Adapter le traitement pour la premiere ligne.
  Pour i = 2 a hauteur(I)
  {
    traitement special pour la premiere colonne
    Pour j=2 a largeur(I)
    {
      gauche = TrouveCompresse(I[i][j-1])
      haut = TrouveCompresse(I[i-1][j])
      courant =TrouveCompresse(I[i][j])
      si (Oracle(gauche,courant))
        Uni(gauche,courant)
      si (Oracle(haut,courant))
        Uni(haut,courant)
    }
    Aplatit (ligne i)
  }
}
```

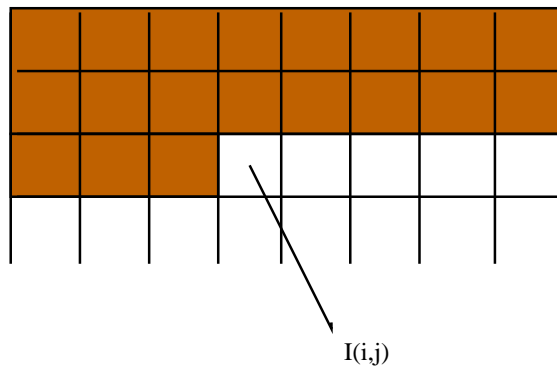
**Algorithme 2:** *Création de la partition*

## L'approche région Les méthodes ascendantes

### Les méthodes Unir-Trouver

Deux type d'opérations :

1. Union pixel-region
2. Union région-région



## L'approche région Les méthodes ascendantes

### Les méthodes de Fusion

1. Créer une partition initiale
2. Fusionner tout couple de régions adjacentes dont l'union reste homogène (prédicat 4 d'Horowitz) :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j / R_i \text{ est adjacent à } R_j \\ \Rightarrow P(R_i \cup R_j) = \textit{faux}$$

→ Prédicat Fusionne( $R_i, R_j$ ).

## L'algorithme Phagocyte de Brice et Fennema (1970)

$|S|$  : longueur du segment  $S$ ,

$|S|_w$  : nombre de points de  $S$  dont le potentiel  
est inférieur à  $\sigma$ .

$\delta R$  : Frontière de  $R$

```
phagocyte()  
{  
  Pour toutes regions  $R_i, R_j$   
  {  
     $S_{ij} = \delta R_i \cap \delta R_j$   
    Si ( $\frac{|S_{ij}|_w}{\min(|\delta R_i|, |\delta R_j|)} < \theta$ )  
    {  
      fusionner  $R_i$  et  $R_j$  en supprimant  $S_{ij}$   
    }  
  }  
}
```

**Algorithme 3:** *Algorithme phagocyte de Brice et Fennema.*

## Le prédicat de Beveridge

Utilisation de nombreux attributs :

– Attributs d'une région  $R_i$  :

$\mu_i$  : moyenne du multi-ensemble,

$\sigma_i$  : écart type,

$|R_i|$  : nombre de pixels,

$\delta R_i$  : frontière,

$|\delta R_i|$  : périmètre.

– Attribut entre deux régions  $R_i$  et  $R_j$  :

$|\delta R_i \cap \delta R_j|$  : longueur de la frontière commune

Trois critères de fusion :

$S_{sim}$  : similitude photométrique,

$S_{size}$  : taille,

$S_{conn}$  : connectivité.

$S_x = 0$  : forte propension à la fusion,

$S_x = 1$  : critère neutre vis à vis de la fusion,

$S_x > 1$  : fusion déconseillée.



## Le prédicat de Beveridge (suite)

1. Similitude photométrique :

$$S_{sim}(R_i, R_j) = \frac{|\mu_i - \mu_j|}{\max(1, \sigma_i + \sigma_j)}$$

2. Critère de taille :  $T_{opt}$  taille optimale

$$S_{size}(R_i, R_j) = \min \left( 2.0, \frac{\min(|R_i|, |R_j|)}{T_{opt}} \right)$$

3. Connectivité :

$$S_{conn}(R_i, R_j) = \begin{cases} c(R_i, R_j) & \text{si } \frac{1}{2} \leq c(R_i, R_j) \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } c(R_i, R_j) < \frac{1}{2} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec :

$$c(R_i, R_j) = \frac{\min(|\delta R_i|, |\delta R_j|)}{4|\delta R_i \cap \delta R_j|}$$

Le prédicat de Beveridge  
(suite et fin)

Unification des critères :

$$S(R_i, R_j) = S_{sim}(R_i, R_j) \sqrt{S_{size}(R_i, R_j) S_{conn}(R_i, R_j)}$$

Fusion à chaque étape des deux régions dont  
la fusion est la plus conseillée :

$$\begin{aligned} \text{Fusionne}(R_i, R_j) &= \text{vrai} \\ \iff S(R_i, R_j) &= \min_{(k,l) \in \{1, \dots, N\}^2} S(R_k, R_l) \end{aligned}$$

$N$  : Nombre de régions.

## L'approche région Les méthodes ascendantes

### Les méthodes d'Agrégation/Fusion Récapitulatif :

Distinction Agrégation/Fusion : Taille des régions initiales (méthodologies très différentes).

- Prise en compte des informations spatiales et colorimétriques
- Grande souplesse dans la définition de l'oracle.
- Très sensible à la stratégie de Fusion/Agrégation



Union find (HG-BD)



Union-find (BD-HG)

**HG** : en haut à gauche (0,0)

**BD** : en bas à droite

## L'approche région

### Les méthodes de découpe-fusion

Inconvénients des approches précédentes :

**Pour les méthodes de découpe récursives :**

1. Impossibilité de revenir sur une découpe



2. Balayage répété de parties de régions

**Pour les méthodes de fusion :** Instabilité vis-à-vis de la stratégie. Spécialement lorsque les régions sont non significatives.

Découpe-Fusion : Supprime (ou diminue) ses inconvénients.

## L'approche région Les méthodes de découpe-fusion

### Principe de la méthode

Introduit par Horowitz. Utilisation des points 3 et 4 de la définition. Partant d'une partition initiale :

1. Découper toute région non homogène

$$\forall i, P(R_i) = \text{faux} \Rightarrow \text{decouper}(R_i)$$

2. Fusionner tout couple de régions dont l'union est homogène.

$$\begin{aligned} \forall (i, j) / R_i \text{ est adjacent à } R_j, \\ P(R_i \cup R_j) = \text{vrai} \Rightarrow \text{fusionner}(R_i, R_j) \end{aligned}$$

Utilisation d'une partition initiale quelconque.

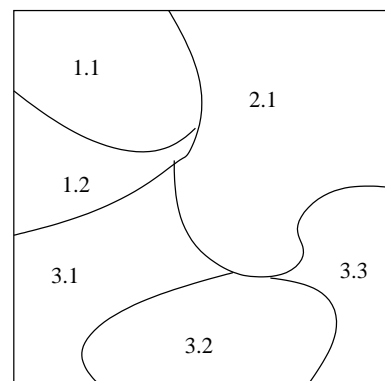
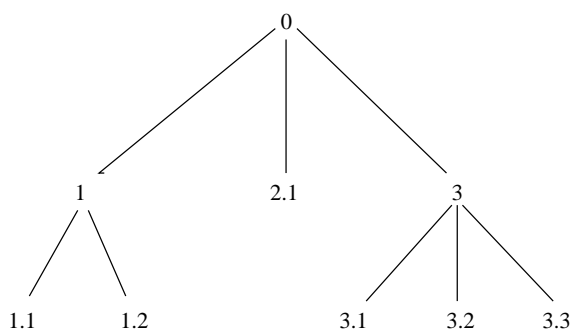
# L'approche région

## Les méthodes de découpe-fusion

### Mise en oeuvre :

### Notion d'arbre de partition

- Racine de l'arbre : L'image  $I$ .
- Successeurs d'un noeud correspondant à une région  $R$  : régions partitionnant  $R$ .
- Feuilles de l'arbre : plus petites régions pouvant être considérées (dans le pire des cas, les pixels).



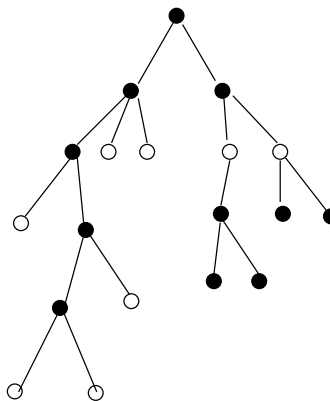
# L'approche région

## Les méthodes de découpe-fusion

### Notion d'arbre de partition (suite)

Partition : Coupure de l'arbre

Tout chemin d'une feuille à la racine comporte un et un seul noeud sélectionné.



- Noeuds appartenant à la coupure
- Noeuds n'appartenant pas à la coupure

## Méta-algorithme

1. Partitionner l'image en un ensemble de régions de taille fixe, créer l'arbre de partition associé.
2.  $\forall i / P(R_i) = \text{faux}$ 
  - Découper( $R_i$ )  $\rightarrow \{R_{i_1}, \dots, R_{i_p}\}$  fils de  $R_i$
  - $R_i \leftarrow \text{noeud}$
3. Si  $\{R_{i_1}, \dots, R_{i_p}\}$  fils de  $R_i$ ,  $\forall j$   $\text{Feuille}(R_{i_j}) = \text{vrai}$  et  $\cup_{j=1}^p R_{i_j}$  homogène.
  - Fusionner( $\{R_{i_1}, \dots, R_{i_p}\}$ )
  - $R_i \leftarrow \text{feuille}$ .
4. Revenir au point 2 jusqu'à ce qu'aucune région ne puisse être découpée ou fusionnée.
5. Fusionner toutes les régions adjacentes  $R_i$ ,  $R_j$  telles que  $P(R_i \cup R_j) = \text{vrai}$  (fusions non restreintes).

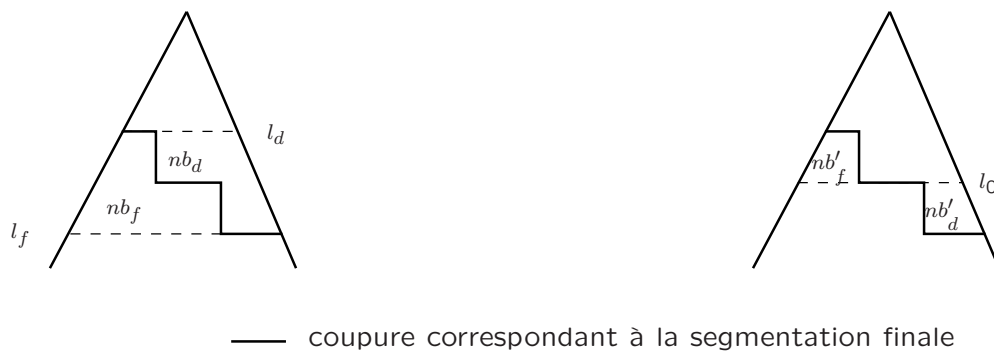
Partition initiale immédiate.



# L'approche région

## Les méthodes de découpe-fusion

### Notion d'optimisation des découpes/Fusions



$l_d$  : Niveau de départ minimum pour un algorithme de découpe

$nb_d$  : Nombre de découpes minimum nécessaires à un algorithme de découpe

$l_f$  : Niveau de départ maximum pour un algorithme de fusion

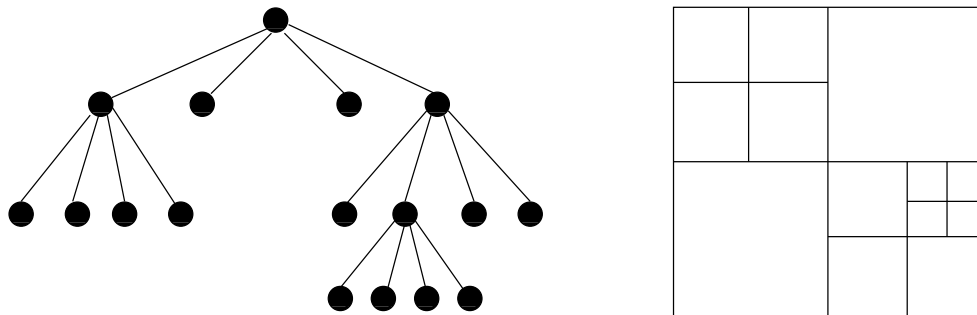
$nb_f$  : Nombre de fusion minimum nécessaires à un algorithme de fusion

# L'approche région

## Les méthodes de découpe-fusion

Une implémentation :  
Le quadtree

Découpage par blocs :



1. Découper l'image en  $N^2$  blocs carrés.
2. Découper tout bloc non homogène en quatre sous-blocs.
3. Si quatre blocs  $B_1, B_2, B_3, B_4$  possèdent le même père dans le quadtree et vérifient  $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) = \text{vrai}$ , fusionner les quatre blocs en un seul.

4. Revenir au point 2 tant que l'on peut appliquer les points 2 ou 3.
5. Fusionner tous les couples de blocs adjacents  $(B_1, B_2)$  vérifiant  $P(B_1 \cup B_2) = \text{vrai}$ .

## L'approche région Les méthodes de découpe-fusion

### Conclusion :

- Plus grande souplesse que les méthodes de découpe pures ou fusion pures.
- Limité par la structure de données : Partitionnement régulier.



Une segmentation basée sur une partition par blocs.

Structures de données utilisées en segmenta-  
tion

## Structures de données utilisées en segmentation

### Énumération des besoins

Opérations effectuées par les algorithmes de  
segmentation :

1. Création d'une partition
2. Modification par Découpes/Fusions

Deux impératifs :

1. Accès rapide aux informations sur la parti-  
tion
2. Modifications rapides de la partition

## Structures de données

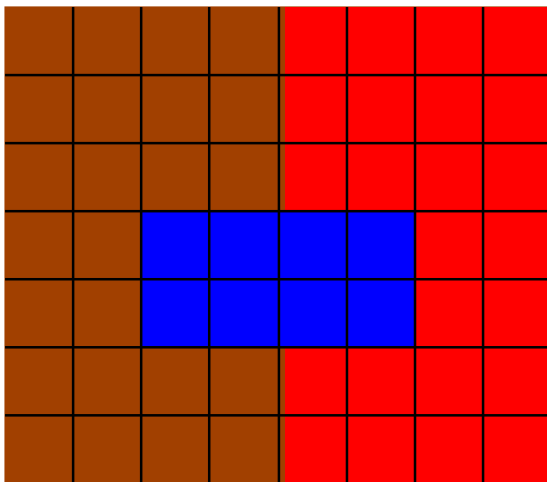
### Classification des informations

- Informations géométriques :  
Ensemble des informations relatives à une région indépendamment des autres régions.
  - Ensemble des pixels d'une région
  - Région englobant un pixel
  - Frontières d'une région
  - ...
- Informations topologiques :  
Ensemble des informations relatives à la partition
  - Ensemble des voisins d'une région
  - Frontière entre deux régions
  - Composantes connexes incluses
  - Région englobante
  - ...

Tableaux de labels

Numéroter les pixels :

$$L[P_1] = L[P_2] \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} / \begin{cases} P_1 \in R_i \\ \text{et} \\ P_2 \in R_i \end{cases}$$



0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	2	2	2	2	1	1
0	0	2	2	2	2	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1



## Tableaux de labels (suite)

### **Avantages :**

- Extrêmement simple à implémenter.
- Accès à de nombreuses informations géométriques (relation point-région directe)

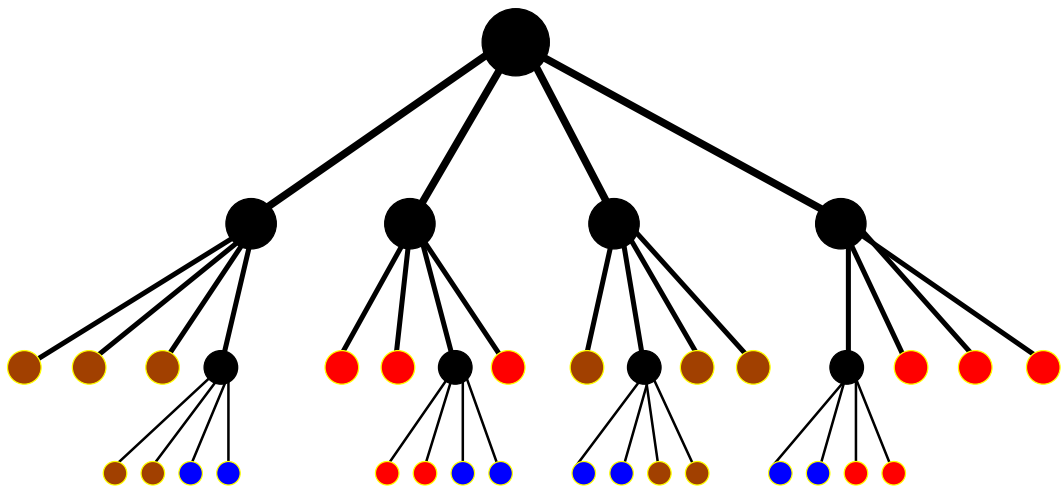
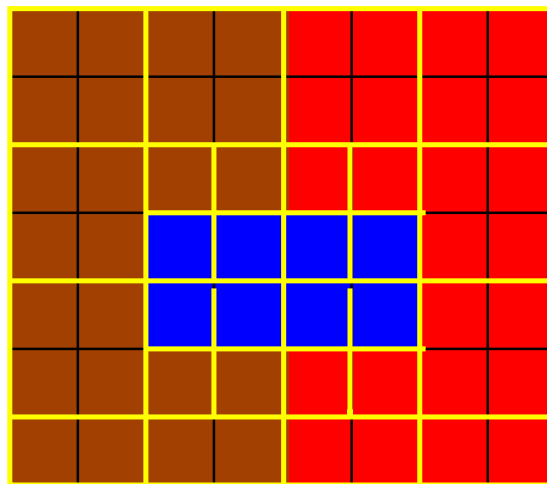
### **Inconvénients :**

- Pas compacte
- Pas d'information de frontière



# Structures de données Structures Géométriques

## Quadtree



```

agregation(germes  $g_1, \dots, g_n$ )
{
    Tableau Regions[n] ;
    labels L ;
    Pile P ;

    Initialiser L a 0 ;
    Pour i de 1 a n
    {
        L[ $g_i$ ]=i ;
        Initialiser R[i] ( $g_i$ ) ;
        Empiler(P,  $V_x(g_i)$ ) /*  $x \in \{4, 8\}$  */
    }

    Tant que P non vide
    {
        p = depiler(P) ;
        label_p=non-defini ;
        Pour tout  $p' \in V_x(p)$ 
        {
            Si (L[ $p'$ ]==0)
                empiler( $p'$ ) ;
            mise_a_jour(label_p, L[ $p'$ ]) ;
        }
        agreger(p, R[label_p]) ;
        L[p]=label_p ;
    }
}

```

**Algorithme 4:** *Un méta-algorithme d'agrégation*

## Quadtrees (suite)

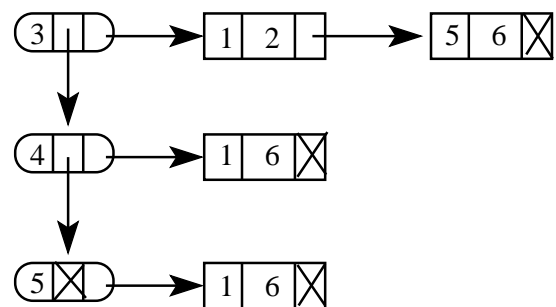
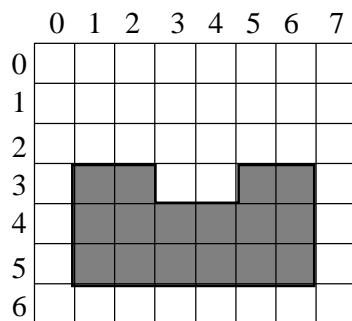
### **Avantages :**

- Accès efficace aux informations géométriques
- Possibilité de multi-résolution

### **Inconvénients :**

- Restreint les découpes et les fusions
- Pas d'information de frontière

## Codage par pages



### Avantages :

- Compression d'information
- Parcours aisé de l'ensemble des pixels

### Inconvénients :

- Pas d'information de frontière.

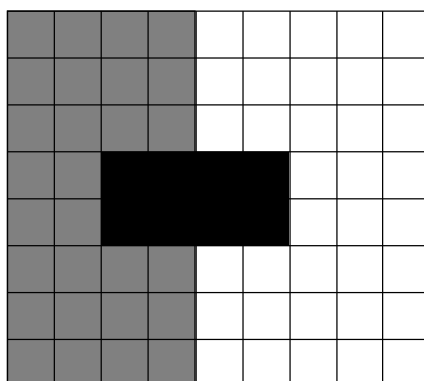
Assez peu utilisé en segmentation.

Transformation par axe médian  
(median axis transform)

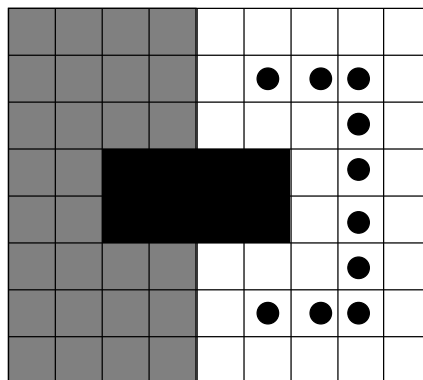
**BB MAT** : Block based MAT. Plus grand carré englobant

**DB Math** : Disk based MAT. Plus grand disque englobant.

- Calculer le plus grand bloc (resp. disque) centré sur chaque pixel et inclus dans la région.
- Rejeter les pixels dont le bloc (resp. le disque) est inclus dans un bloc (resp. disque) pré-existant.



Transformation par axe médian  
(suite)



**Avantages :**

- Représentation compacte
- Axe Médian : Information sur la forme des régions → Reconnaissance de formes.

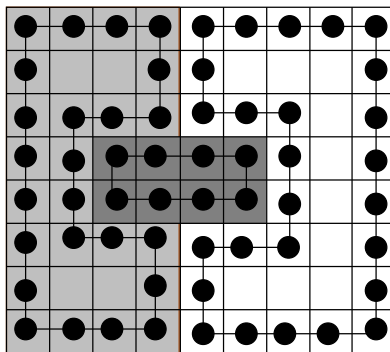
**Inconvénients :**

- Découpe ou fusion de région : → Reconstruction du squelette : Pas adapté à la segmentation.

## Représentations par frontières

Ne coder que les points frontières :

P point Frontière  $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} V(P) \notin R_i$



**Avantages :** Accès aux informations de frontière.

**Inconvénients :**

- Ambiguïtés sur la localisation de la frontière (redondance d'information)
- Les segments peuvent ne pas vérifier le théorème de Jordan (séparation intérieur-extérieur)



Représentations par frontières demi-entières.  
Brice et Fenema 1970

ensemble des pixels définit dans  $P_0$  :

$$P_0 = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

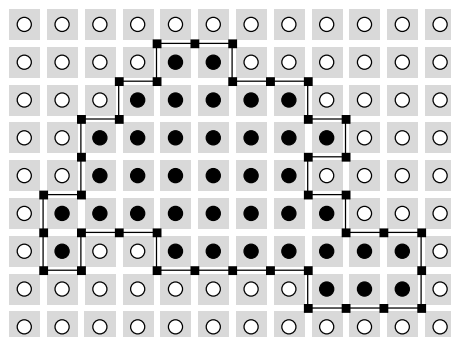
→ ensemble des frontières définies dans :

$$P_{\frac{1}{2}} = \left\{ \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right), \text{ avec } (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

$p \in P_{\frac{1}{2}}$  demis voisins de  $P' \in P_0$  ssi :

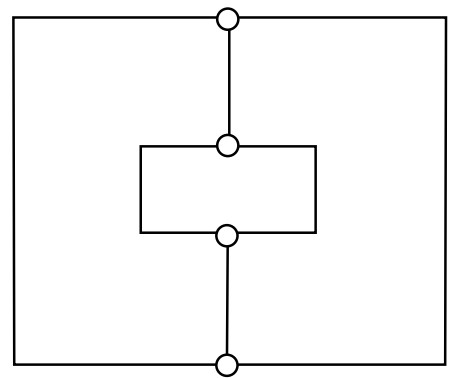
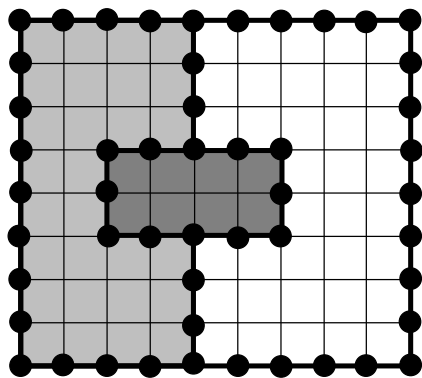
$$|x_p - x'_p| = |y_p - y'_p| = \frac{1}{2}$$

$p$  point frontière si deux de ces demis voisins appartiennent à des régions différentes.



Représentations par frontières demi-entières.  
(suite)

- Points inter-pixels : Coins des pixels
- Liens entre les points : Cotés des pixels



Structuration en segments maximaux et noeuds

**segment maximal** : Chemin maximal entre deux régions.

**Noeud** : Point frontière d'arité au moins 3.

Représentations par frontières demi-entières.  
(suite et fin)

**Avantages :**

- Informations de frontières
- Codage compact
- Pas d'ambiguïté dans la localisation des frontières.

**Inconvénients :** Coût prohibitif des informations sur la partition

- Informations d'inclusion → Parcourir l'ensemble des pixels de la région.
- Information de voisinage → Parcourir tous les points frontières d'une région

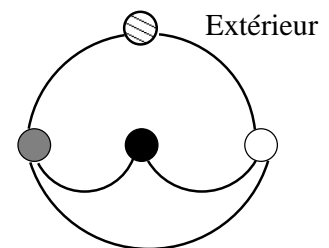
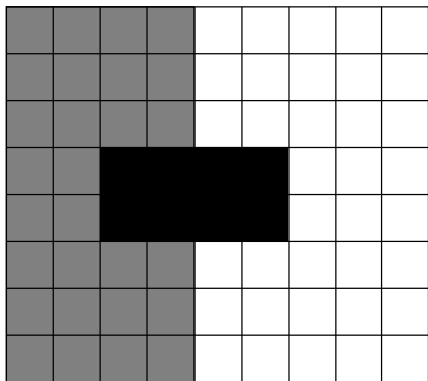
# Structures de données

## Structures Topologiques : Le graphe d'adjacence de régions

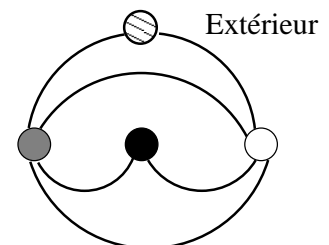
Graphe  $G = (V, E)$  :

**V** : Un noeud par région

**E** : Une arête par relation d'adjacence entre régions.



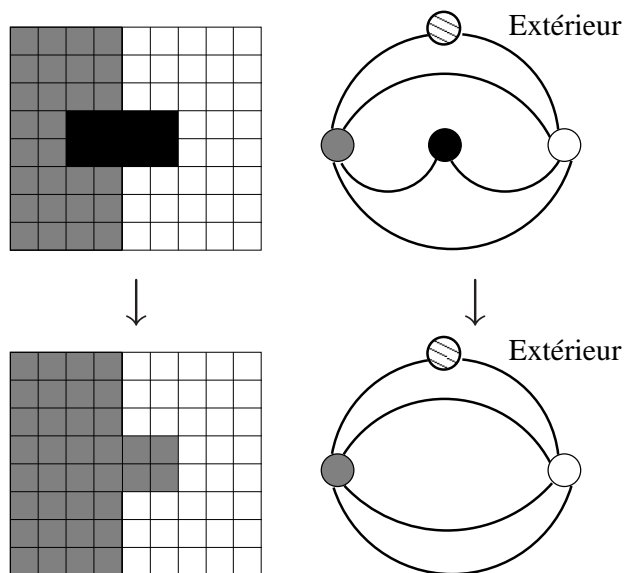
Amélioration :



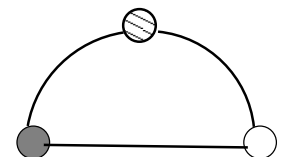
## Le graphe d'adjacence de régions (suite)

Fusion de régions : Contraction d'arête

1. Identification des deux noeuds
2. Suppression de l'arête contractée



Simplification :

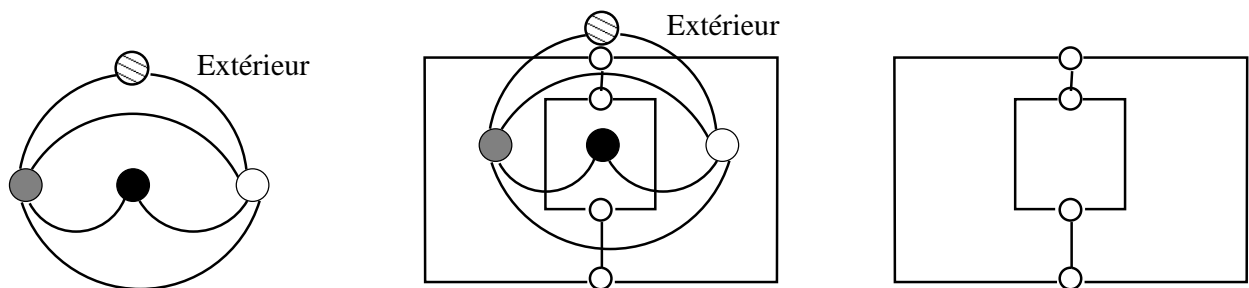


## Les graphes duaux

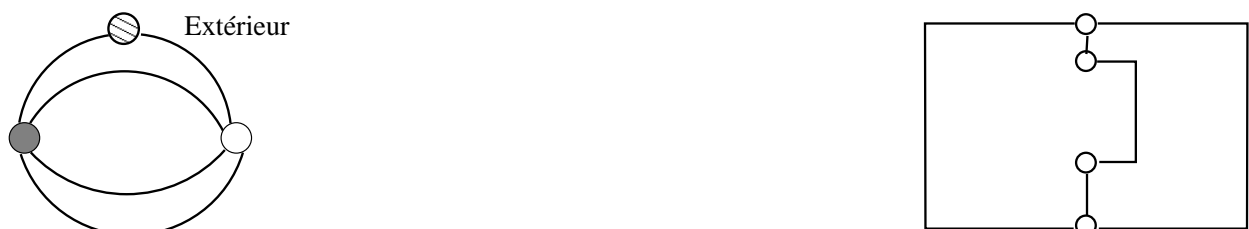
$$G = (V, E) \rightarrow \bar{G} = (F, \bar{E})$$

**F** : Ensemble des faces du graphe initial

$\bar{E}$  : Adjacence entre les faces (bijection entre  $E$  et  $\bar{E}$ ).



Caractérisations des simplifications : Locales dans le graphe dual.



Graphes/Graphes améliorés/Graphes duaux

**Graphes usuels** : Il existe “une” relation entre deux régions (adjacence ?, inclusions ?)...

**Graphes améliorés** : Une arête par relation d'adjacence (bijection entre les arêtes du graphe et les frontières de la partition)

**Graphes duaux** : Caractérisation des propriétés des faces.

Structures de Graphes :

**Avantages** : De nombreuses propriétés topologiques

**Inconvénients** : Pas adaptés aux découpes.

**Graphes duaux** : Maintenance de deux structures de données

Cartes Combinatoires  
(Rappels mathématiques)

Soit un ensemble  $D$ .

Permutation : Application bijective de  $D$  dans  $D$ . Soit  $\pi$  une permutation.

–  $\pi$ -orbite de  $b \in D$  :

$$\pi^*(b) = \{b, \pi(b), \pi^2(b), \dots, \}$$

– Décomposition en cycles :

$$\pi = \pi^*(b_1)\pi^*(b_2) \dots \pi^*(b_n) \dots$$

Cycle : Restriction de  $\pi$  à une orbite.



### Exemple de permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Orbites :

$$\pi^*(1) = \{1, 3, 6\}$$

$$\pi^*(2) = \{2, 10, 9, 8, 5\}$$

$$\pi^*(4) = \{4\}$$

$$\pi^*(7) = \{7\}$$

$$\pi = (1, 3, 6)(2, 10, 9, 8, 5)(4)(7)$$

## Définition

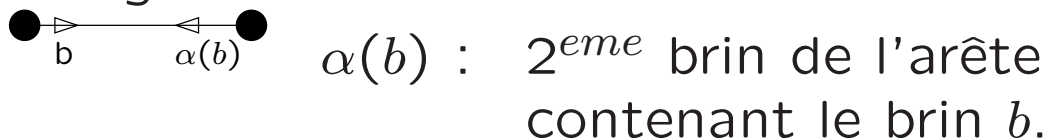
$$G = (V, E) \rightarrow G = (\mathcal{B}, \sigma, \alpha)$$

Décomposer chaque arête en 2 brins (demi-arêtes) :

– Élément de base : brin.

$\mathcal{B}$  : Ensemble des brins

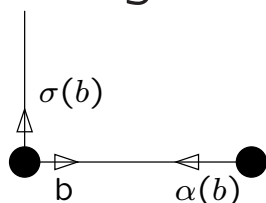
– Codage des arêtes :



Peut être codée implicitement en dimension 2 :

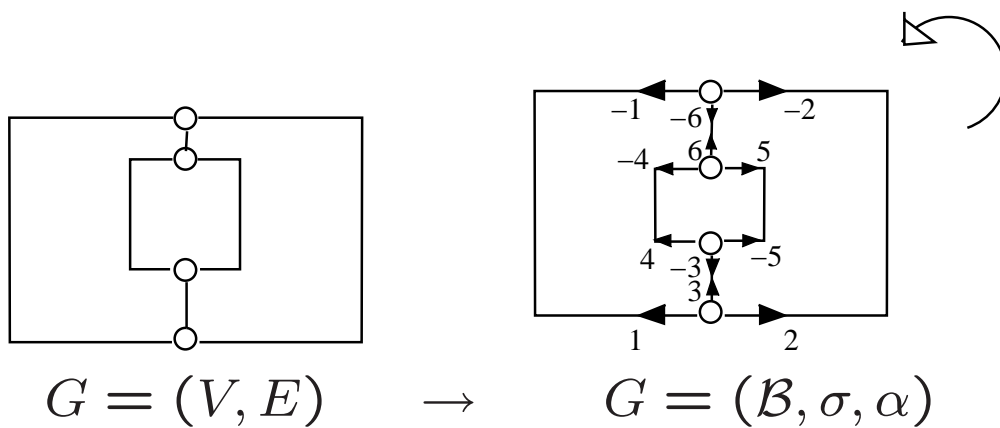
$$\forall b \in \mathcal{B} \quad \alpha(b) = -b$$

– Codage des sommets :



$\sigma(b)$  : prochain brin rencontré en tournant dans le sens positif autour du sommet qui contient  $b$ .

Exemple



- $\mathcal{B} = \{-6, \dots, -1, 1, \dots, 6\}$
- Permutation  $\alpha$   
 $\forall b \in \{-6, \dots, -1, 1, \dots, 6\} \quad \alpha(b) = -b$   
 $\Rightarrow \alpha = (1, -1)(2, -2)(3, -3)(4, -4)(5, -5)(6, -6)$
- Permutation  $\sigma$   
 $\sigma = (1, 2, 3)(-3, -5, 4)(5, 6, -4)(-6, -2, -1)$

## Récapitulatif

**Élément de base** : Le brin ou demi-arête

**Codage des arêtes** : Permutation  $\alpha$

**Codage des sommets** : Permutation  $\sigma$

Chaque brin appartient à une seule arête et un seul sommet.

Passage au dual : Permutation  $\varphi = \sigma \circ \alpha$

## Passage au dual



$$\varphi = (1, -6, -4, -3)(-2, 3, -5, 6)(5, 4)(2, -1)$$

Propriétés :

1. Chaque brin appartient à une seule face.
2. Tous les brins “voient” leur face associée à leur droite (bonhomme d’Ampère).
3. Toutes les faces sauf une sont parcourues dans le sens horaire.
4. La face parcourue dans le sens positif est appelée la face infinie ( $f^\infty$ ) de la carte → composante connexe.

## Fonctions d'étiquetage

But : Fournir un identifiant de face.

$\lambda$  étiquette de face  $\Leftrightarrow$  constante sur chaque orbite de  $\varphi$ .

$$\begin{array}{l} \varphi : \\ \lambda : \end{array} \left| \begin{array}{cccc} (1, -6, -4, -3) & (-2, 3, -5, 6) & (5, 4) & (2, -1) \\ f_1 = \lambda(1) & f_2 = \lambda(-2) & f_3 = \lambda(5) & f^\infty = \lambda(2) \end{array} \right.$$

$\lambda$  permet d'associer une seule valeur à tous les brins d'une même orbite :

$$\lambda(1) = \lambda(-6) = \lambda(-4) = \lambda(-3) = f_1$$

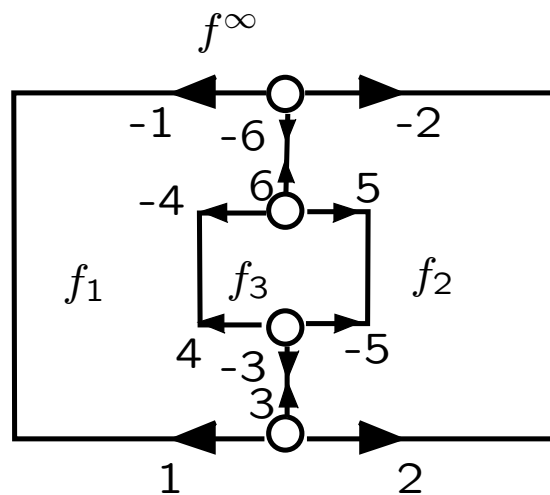
Fonction d'équitage inverse  $\lambda^{-1}$  ssi :

$$\forall b \in \mathcal{B} \quad \lambda^{-1}(\lambda(b)) \in \varphi^*(b)$$

exemple :

$$\begin{array}{l} \lambda^{-1}(f_1) = 1 \\ \lambda^{-1}(f_2) = 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} \lambda^{-1}(f_3) = 5 \\ \lambda^{-1}(f^\infty) = -1 \end{array} \right.$$

Fonctions d'étiquetage  
 Illustration



$$G = (\mathcal{B}, \sigma, \alpha), \quad \mathcal{B} = \{-6, \dots, -1, 1, \dots, 6\}$$

$$\begin{array}{l} \varphi : \\ \lambda : \end{array} \left| \begin{array}{cccc} (1, -6, -4, -3) & (-2, 3, -5, 6) & (5, 4) & (2, -1) \\ f_1 = \lambda(1) & f_2 = \lambda(-2) & f_3 = \lambda(5) & f^\infty = \lambda(2) \end{array} \right.$$

## Implémentation

$$\begin{aligned} \sigma &= (1, 2, 3)(-3, -5, 4)(5, 6, -4)(-6, -2, -1) \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & -1 & -6 & 2 & 3 & 1 & -3 & 6 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= (1, -6, -4, -3)(-2, 3, -5, 6)(5, 4)(2, -1) \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -4 & 6 & -3 & 1 & 3 & 2 & -6 & -1 & -5 & 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Implémentation par des tableaux d'entiers :

$$\sigma = \begin{array}{c} -6 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline -5 \\ \hline -1 \\ \hline -6 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline -3 \\ \hline 6 \\ \hline -4 \\ \hline \end{array} \varphi = \begin{array}{c} -6 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -4 \\ \hline 6 \\ \hline -3 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline -6 \\ \hline -1 \\ \hline -5 \\ \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline -2 \\ \hline \end{array} \lambda = \begin{array}{c} -6 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \lambda^{-1} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

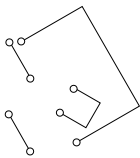


## Récapitulatif

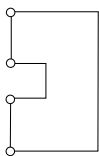
- Codage du graphe par des permutations
- Codage implicite du graphe dual (permutation  $\varphi$ )
- Codage explicite de l'orientation (permutation  $\sigma$ )

Graphes duaux/Cartes combinatoires :

**Graphes duaux**  $\rightarrow$  Liste des frontières d'une région

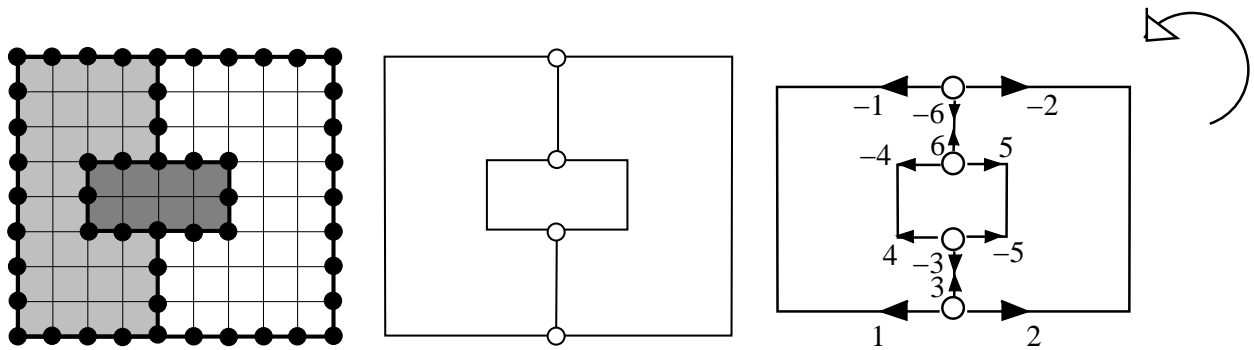


**Cartes combinatoires**  $\rightarrow$  Liste ordonnée des frontières.



## Extension

Association géométrie - topologie.



Associer :

- Les noeuds et les sommets
- Les segments et les arêtes
- $\Rightarrow$  Les régions et les faces

Possibilité de mise à jour efficace de la structure après une découpe.