



Morphologie mathématique

*Squelette, squelette par zone d'influence et ligne de partage
des eaux*

Luc Brun (d'après le cours de M. Coster)

Plan



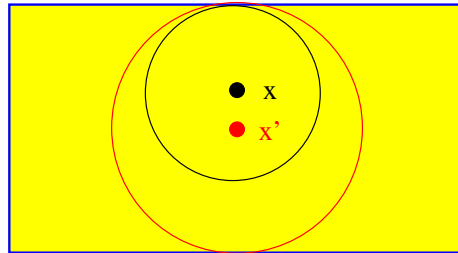
- Squelette (SK)
 - Définitions propriétés
 - Le squelette et les transformations morphologiques de base
 - Configurations de voisinage et les éléments structurants bi-colorés, les transformations en tout ou rien
 - Amincissement et épaissement, squelette et amincissement homotopique, Points particuliers du squelette
 - La bissectrice conditionnelle
- Squelette par zone d'influence (SKIZ)
- Segmentation par ligne de partage des eaux (LPE)
 - Approche par écoulement,
 - LPE 1D par inondation,
 - LPE 2D par inondation,
 - Techniques de Marquage
 - Swamping
 - Dynamique des bassins
 - LPE hiérarchique
 - Waterfall
 - Dynamique des contours

Le squelette



■ Boule maximale :

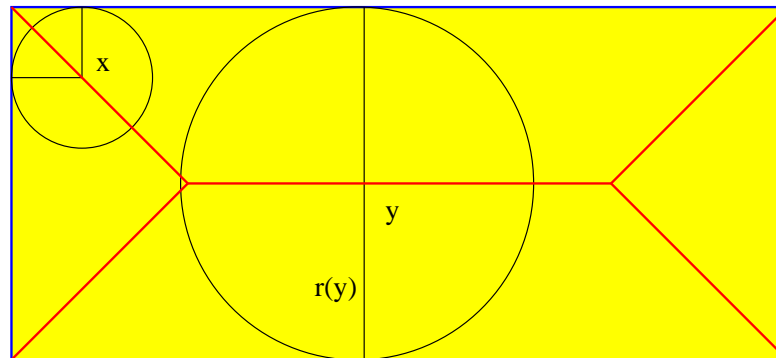
Une boule $B(x, \rho)$ est maximale dans X s'il n'existe pas $B'(x', \rho')$ tel que



$$B(x, \rho) \subset B'(x', \rho') \subset X$$

■ Squelette :

Le squelette $Sk(X)$ est l'union des centres des disques maximaux B contenus dans X . En pratique les disques maximaux touchent ∂X en au moins 2 points.



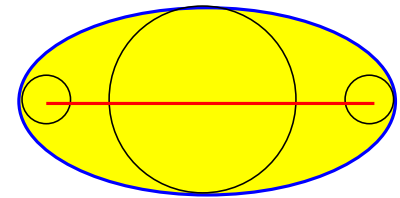
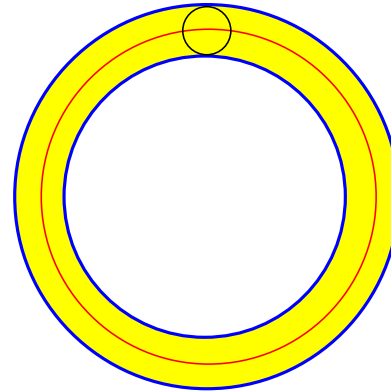
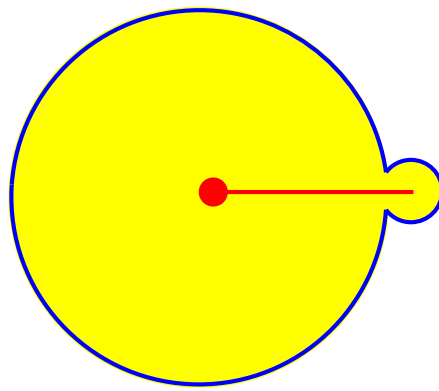
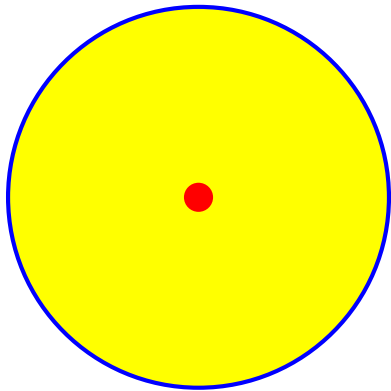
■ — : ∂X

■ — : $Sk(X)$

Propriétés du squelette



- Dans l'espace continu :
 - Le squelette n'est pas une transformation croissante
 - Le squelette n'est pas une transformation continue (Le squelette est très sensible au bruit)
 - Le squelette est une transformation homotopique et idempotente



Discontinuité de la squelettisation

Homotopie

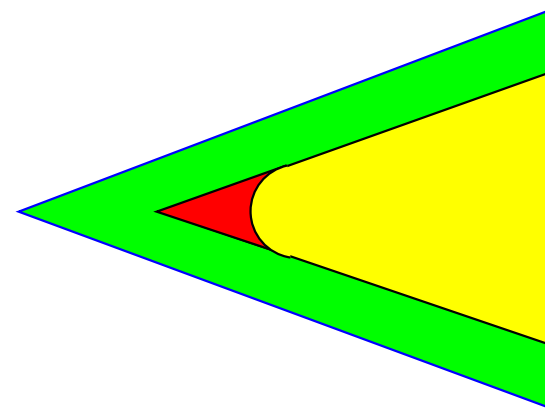
Squelette et transformations morphologiques de



- Algorithme de Lantuéjoul : Le squelette est l'union (pour tout les $\lambda > 0$) de l'intersection (pour tout les $\mu > 0$) de la différence entre l'érosion de X par λB , et de l'érosion de X par λB ouverte par μB .

$$Sk(X) = \bigcup_{\lambda} \bigcap_{\mu} \mathcal{E}_{\lambda B}(X) - \gamma_{\mu B}(\mathcal{E}_{\lambda B}(X))$$

- + ■ + ■ : X
- + ■ : $\mathcal{E}_{\lambda B}(X)$
- : $\gamma_{\mu B}(\mathcal{E}_{\lambda B}(X))$
- : $\mathcal{E}_{\lambda B}(X) - \gamma_{\mu B}(\mathcal{E}_{\lambda B}(X))$



Squelettes et résidus



- Squelette par ouverture (de Lantuéjoul)

$$Sk(X) = \bigcup_i \mathcal{E}_{iB}(X) - \gamma_{1B}(\mathcal{E}_{iB}(X))$$

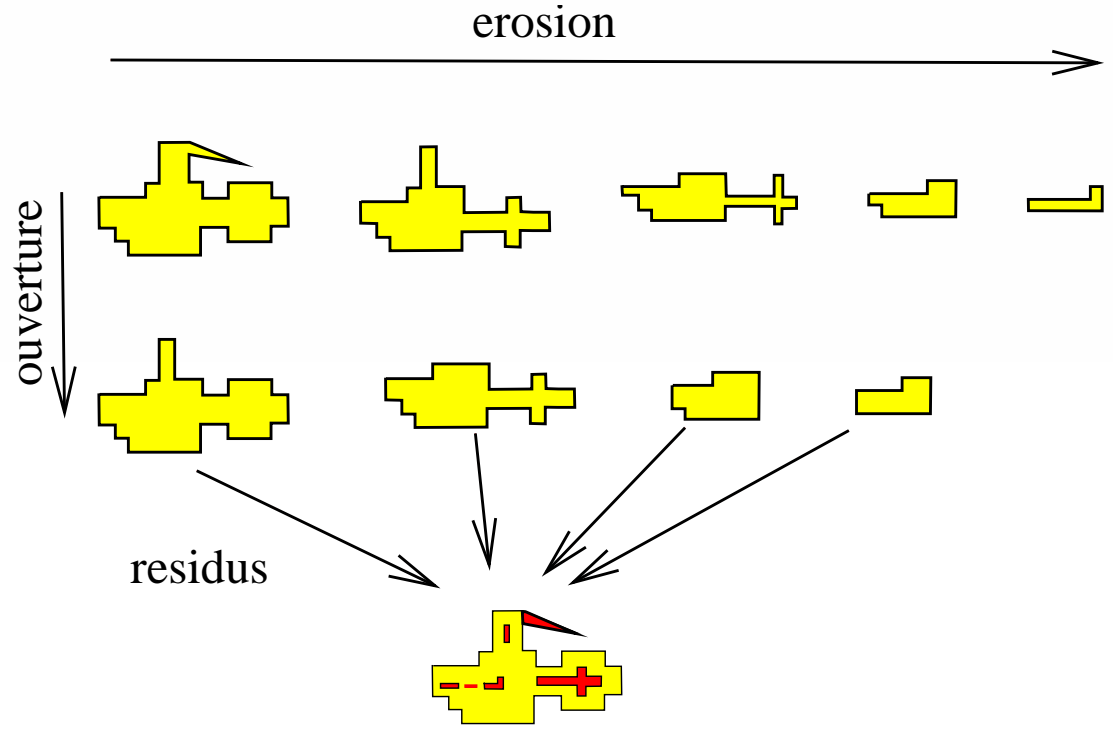
- Érodés ultimes :

$$Sk(X) = \bigcup_i U_i(X) = \bigcup_i \mathcal{E}_{iB}(X) - \gamma^{Rec}(\mathcal{E}_{(i+1)B}(X) : \mathcal{E}_{iB}(X))$$

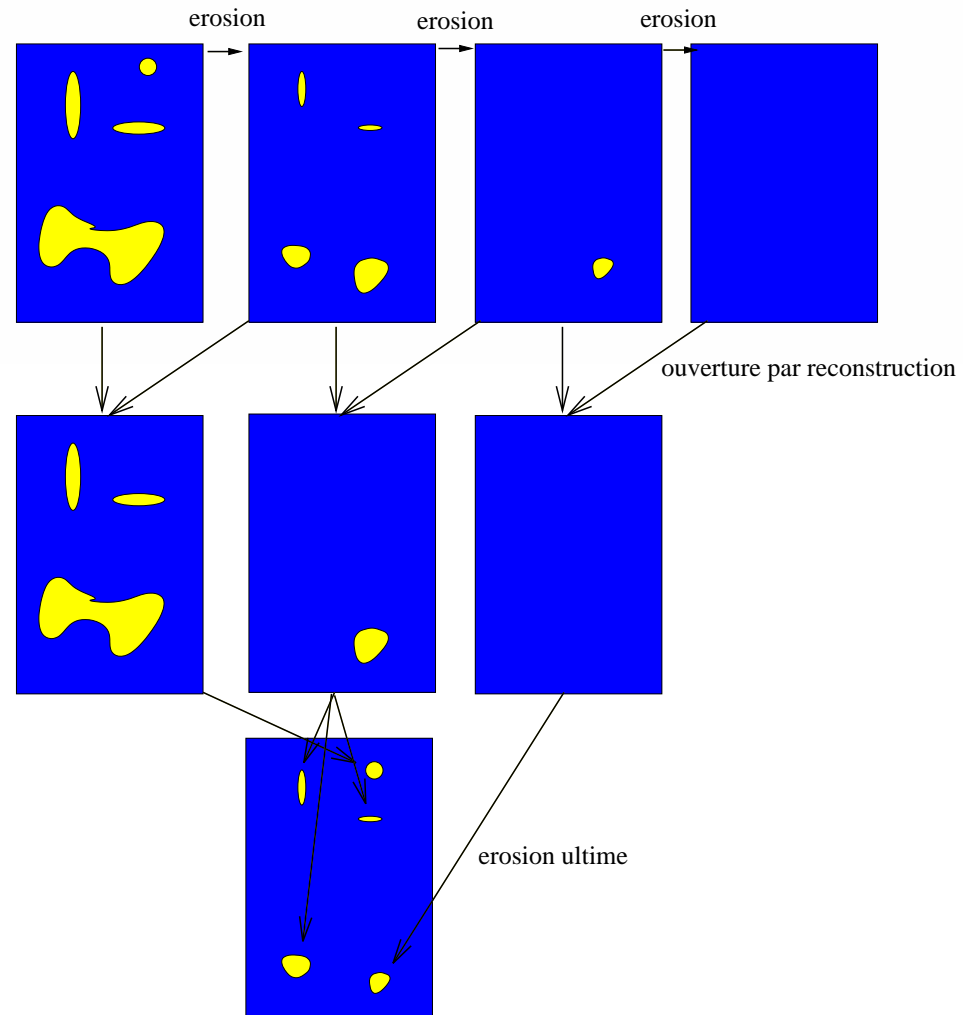
- Bissectrice conditionnelle :

$$B(X) = \bigcup_i B_i(X) = \bigcup_i \mathcal{E}_{iB}(X) - \delta_{nB}(\mathcal{E}_{(i+1)B}(X) : \mathcal{E}_{iB}(X))$$

Squelette par Ouverture : Illustration



Érosion Ultime : Illustration



Bissectrice conditionnelle



■ Remarque :

La bissectrice conditionnelle à un comportement intermédiaire entre l'ensemble des érodés ultimes et le squelette par ouverture. Elle dépend d'un paramètre n lié à la variation de taille des disques maximaux inscrits.



Squelettes et Résidus : Récapitulatif



$$Sk(X) = \bigcup_i F_1^i(X) - F_2^i(X)$$

Résidus	F_1	F_2
Squelette par ouverture	érosion	ouverture unitaire
Résidus ultimes	érosion	ouverture par reconstruction
Bissectrice	érosion	ouverture géodésique

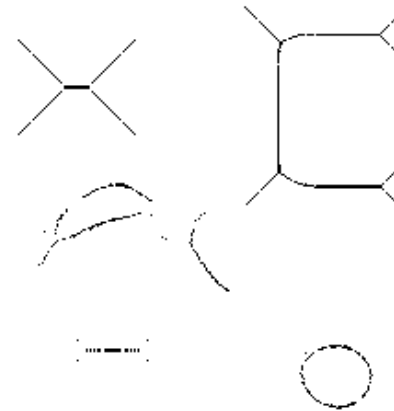
Propriétés de la squelettisation



- Dans le cas numérique,
 - L'intersection des ouvertures par μB est remplacée par une ouverture avec $1B$,
 - le squelette par ouverture n'est pas connexe. La topologie (homotopie) n'est pas préservée.
- \Rightarrow Le squelette homotopique est obtenu par amincissement



Formes



Squelette par ouverture

Amincissements et épaissement



- Les amincissements et épaissement sont obtenus comme résidu de transformations bi-colorées.

- Amincissement :

L'amincissement de l'ensemble X consiste à enlever les points qui correspondent à une configuration donnée. C'est le résidu morphologique entre l'image initiale et la transformation en tout ou rien correspondant à cette configuration.

$$\theta_T(X) = X - \eta_T(X)$$

- Épaississement :

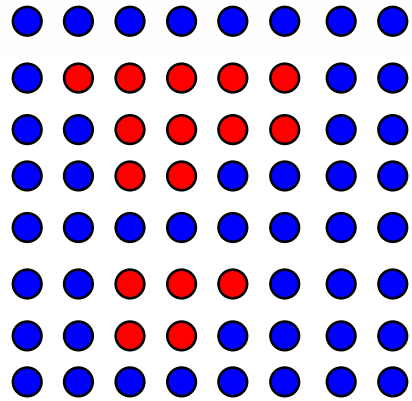
L'épaississement d'un ensemble X consiste à ajouter les points correspondant à une configuration donnée.

$$\xi_T(X) = X \cup \eta_T(X)$$

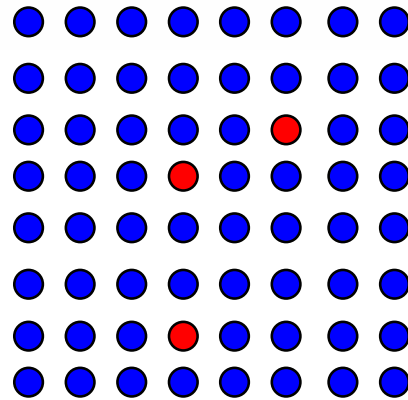
Exemple



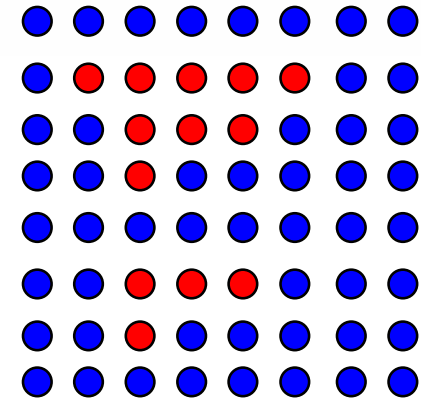
$$\blacksquare T = \begin{matrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{matrix}$$



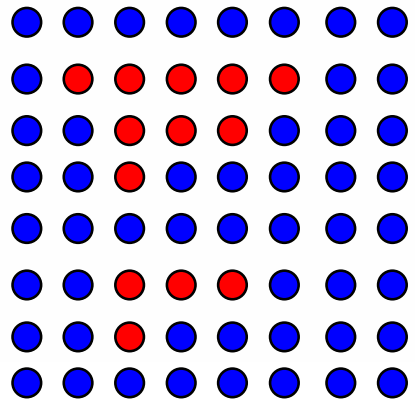
$\eta_B(X)$
→



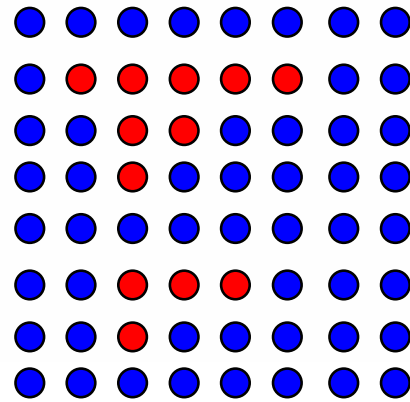
$\theta_B(X)$
→



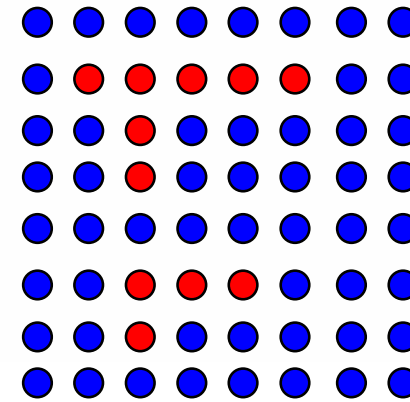
Exemple de séquence d'amincissement



$\theta_T(X)$



$\theta_T(\theta_T(X))$



$\theta_T(\theta_T(\theta_T(X)))$

résultat stable

Amincissements et épaisissements homotopiques

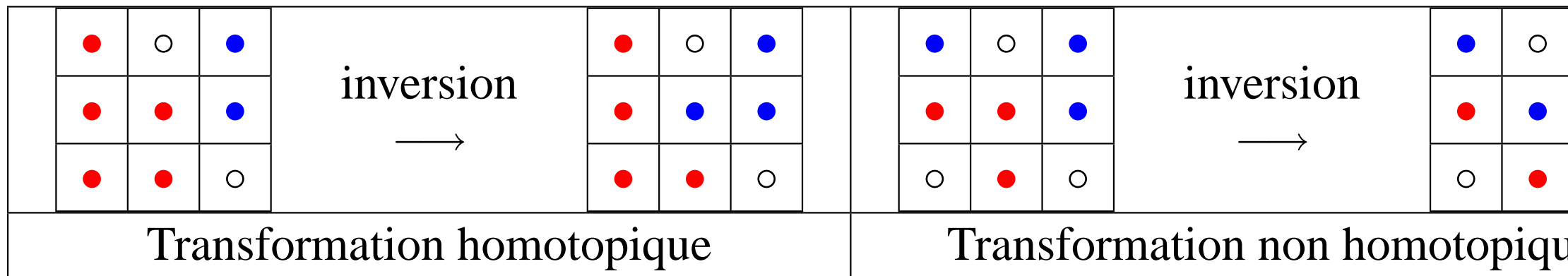


■ Définition :

Un amincissement (épaisissement) homotopique conserve la topologie de l'ensemble de départ.

■ Règles de construction des éléments bicolores

- Le pixel central est à 1 (amincissement) ou 0 (épaisissement)
- L'inversion de la couleur du point central ne doit pas modifier la topologie associée



Squelettes par amincissements



■ Définition :

Le squelette par amincissement utilise une famille d'éléments structurants qui préservent l'homotopie (M, L ou D). La famille est obtenue par rotation de la configuration L, M ou D. L'amincissement s'arrête lorsqu'il n'y a plus de modification des pixels de l'image.

$$Sk_L(X) = (\theta_L(X))_\infty = (X - \eta_L(X))_\infty$$

- Afin d'amincir dans toutes les directions il nous faut une famille d'éléments structurants se déduisant les un des autres par rotations.
- Pour une maille carré on obtient 8 éléments avec une rotation de $\frac{\pi}{4}$.
- Pour une maille triangulaire on a 6 éléments avec une rotation de $\frac{\pi}{3}$.

Exemple avec l'élément L en 8 connexité



- On a 8 éléments L_1, \dots, L_8

$$\theta_{1L}(X) = \theta_{L_8}(\dots \theta_{L_3}(\theta_{L_2}(\theta_{L_1}(X))))$$

<p style="text-align: center;">L_1</p>	<p style="text-align: center;">L_2</p>	<p style="text-align: center;">L_3</p>	<p style="text-align: center;">L_4</p>
<p style="text-align: center;">L_5</p>	<p style="text-align: center;">L_6</p>	<p style="text-align: center;">L_7</p>	<p style="text-align: center;">L_8</p>

Différentes familles d'éléments structurants (1/2)



■ En 6 connexité

	Famille	Amincissement
L		Squelette homotopique L : Lskel
M		Squelette homotopique M : Mskel
D		Squelette homotopique D : Dskel
E		Ébarbage

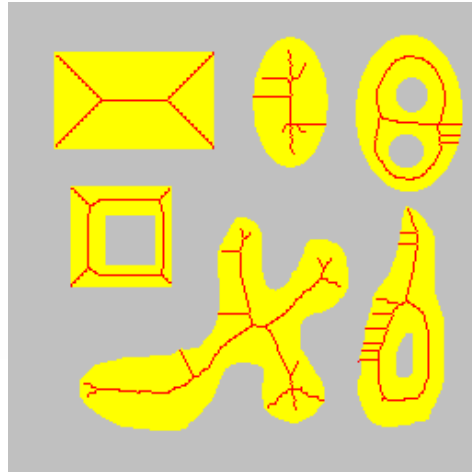
Différentes familles d'éléments structurants (2/2)



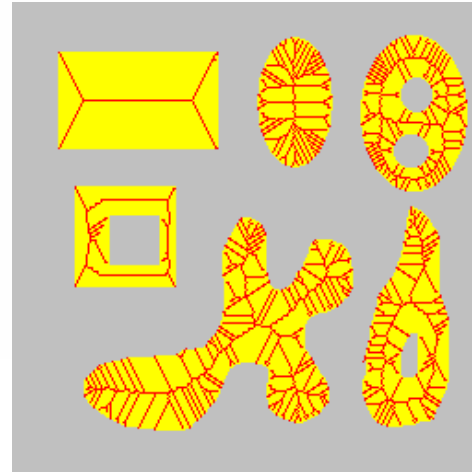
■ En 8 connexité

Familles		Amincissement
L		Squelette homotopique L : Lskel
M		Squelette homotopique M : Mskel
E		Ébarbage

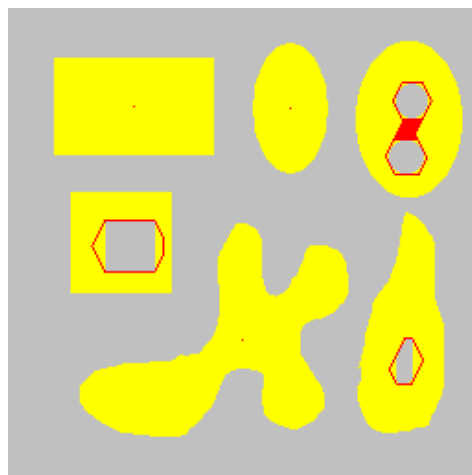
Exemples en 6 connexité



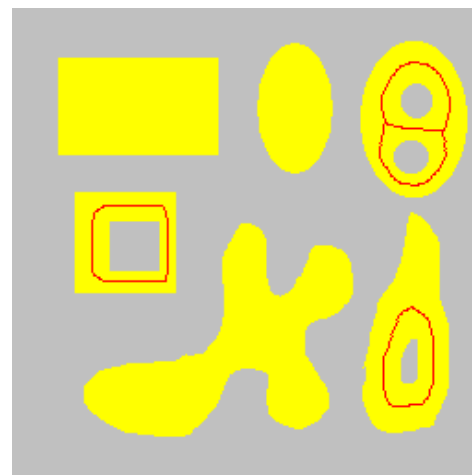
$Lsk(X)$



$Msk(X)$

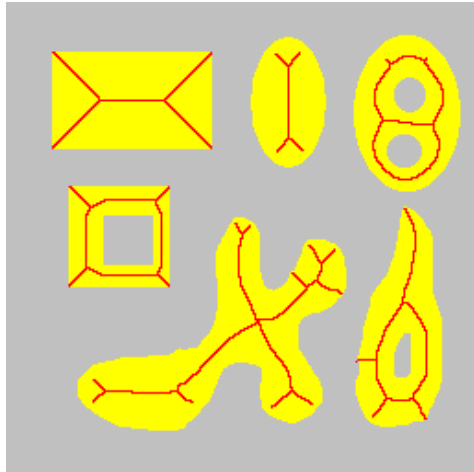


$Dsk(X)$

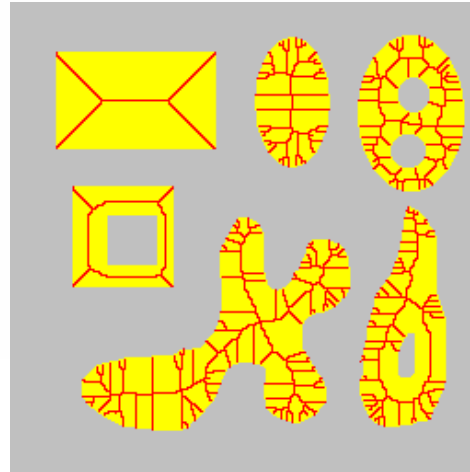


$Lsk(X)$ Ébardé par E .

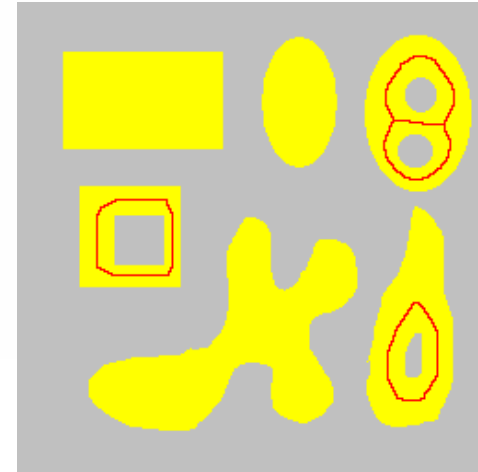
Exemples en 8 connexité



$Lsk(X)$



$Msk(X)$



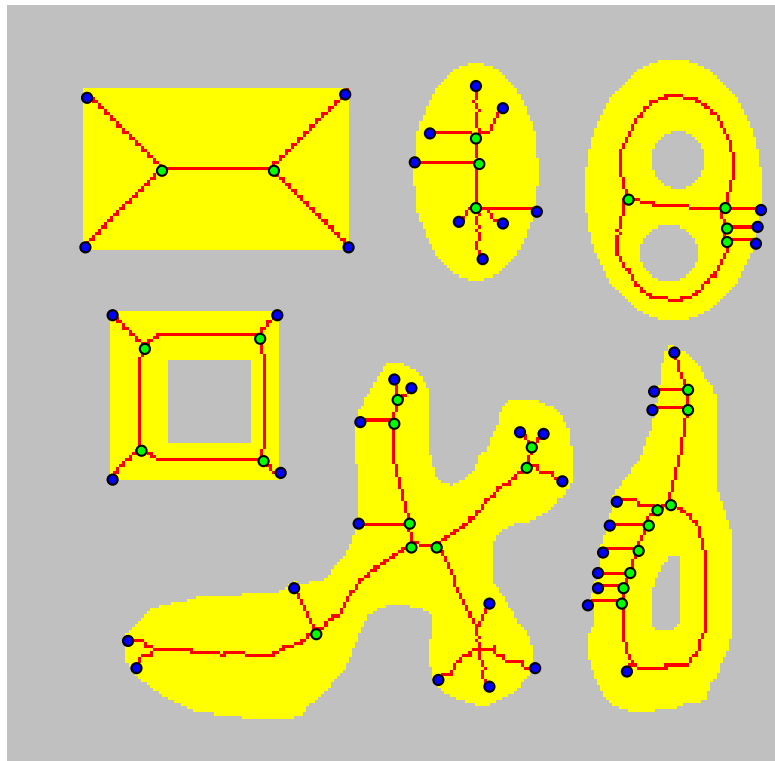
$Lsk(X)$ ébardié par E .

Points particuliers



- Les points particuliers d'un squelette sont les points ayant moins ou plus de deux voisins.
 - Les points extrêmes (arité 1),
 - Les points multiples (arité ≥ 3)

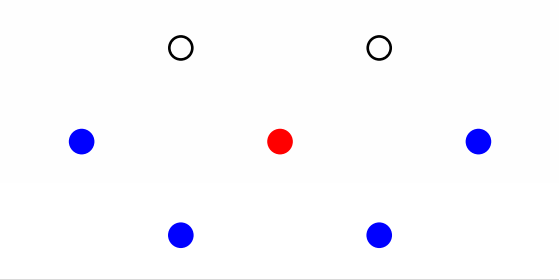
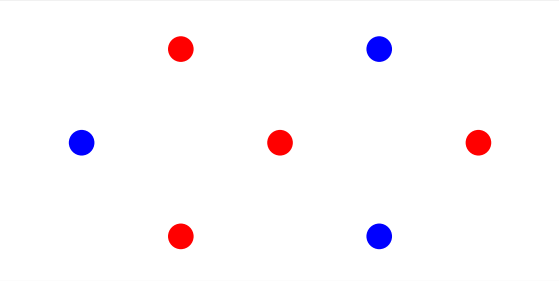
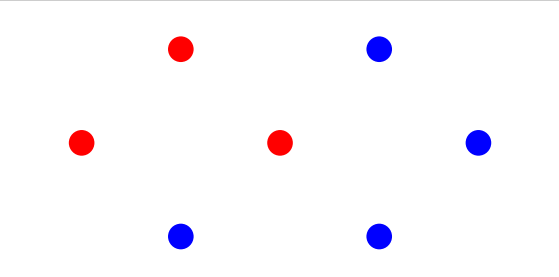
●	Point extrême
●	Point multiple



Détection des points particuliers



■ En maille triangulaire

	Famille	Points particuliers
E		Points extrêmes
F		Points triples
F'		Points triples

Détection des points particuliers



■ En maille 8 connexe

	Famille	Points particuliers
E		Points extrêmes
F		Points multiples
F'		Points multiples
F''		Points multiples

Squelette par zone d'influence (SKIZ)



- Squelette (SK)
 - Définitions propriétés
 - Le squelette et les transformations morphologiques de base
 - Configurations de voisinage et les éléments structurants bi-colorés, les transformations en tout ou rien
 - Amincissement et épaissement, squelette et amincissement homotopique, Points particuliers du squelette
- La bissectrice conditionnelle
- **Squelette par zone d'influence**
 - Approche par écoulement,
 - LPE 1D par inondation,
 - LPE 2D par inondation,
 - Techniques de Marquage
 - Swamping
 - Dynamique des bassins
 - LPE hiérarchique
 - Waterfall
 - Dynamique des contours

Squelette par zone d'influence (SKIZ)



- Soit un ensemble X composé d'objets disjoints. A chaque objet X_i on peut associer une zone d'influence Y_i , telle que chaque point y de Y_i est plus proche de X_i que de tout autre objet X_j ($i \neq j$).

$$Y_i = \{y \mid \forall j \neq i, d(y, X_i) < d(y, X_j)\}$$

- Le squelette par zone d'influence (ou SKIZ) de X , noté $Skiz(X)$, est par définition le complément de l'union de tout les Y_i (zones d'influence) ;

$$Skiz(X) = \mathcal{C}_E\left(\bigcup_i Y_i\right)$$

Propriétés du SKIZ



- Le squelette par zone d'influence (SKIZ) partage l'espace en autant de parties qu'il y a de composantes connexes.
- Le SKIZ n'est pas une transformation homotopique. En effet, la zone d'influence d'un objet est une composante simplement connexe que l'objet soit sans trou ou avec trou.
- Le SKIZ n'est pas une transformation croissante.
- Le SKIZ est une transformation anti-extensive par rapport à $\mathcal{C}_E(X)$.
- Le SKIZ est une transformation semi-continue supérieure. La transformation est nettement plus stable que la squelettisation.

Calcul du SKIZ



- Dans le cas numérique, le SKIZ est obtenu à partir du squelette de l'ensemble complémentaire, appelé exo-squelette. L'ébarbage de l'exosquelette donne le SKIZ.



Exo Squelette



SKIZ

Amincissements et Épaississements Géodésique



- Un épaississement par un élément structurant T_1 est défini par :

$$\xi_T(Y) = \xi_{T_n}(\dots \xi_{T_2}(\xi_{T_1}(Y)))$$

où T_i est l'élément structurant défini par une rotation $i.\alpha$ de l'élément T_1 .

- L'épaississement géodésique de Y par rapport à X avec l'élément structurant mT est obtenu en intersectant chaque épaississement avec X .

$$\xi_{X,mT}(Y) = (\dots \xi_{1T}(\xi_{1T}(\xi_{1T}(Y) \cap X) \cap X) \cap X)_{m \text{ fois}}$$

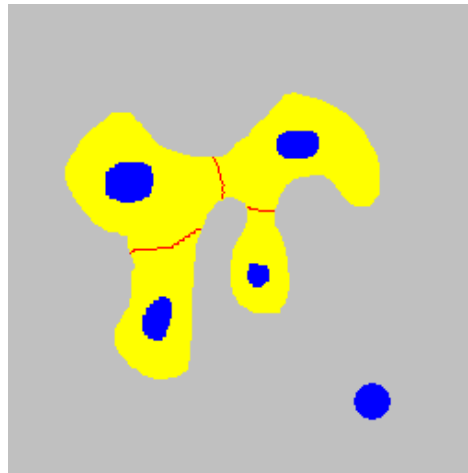
- L'amincissement géodésique est défini à partir de l'épaississement géodésique de la différence symétrique de X et Y , suivi à nouveau d'une différence symétrique :

$$\theta_{X,nT}(Y) = X / \xi_{X,nT}(X/Y)$$

SKIZ Géodésique



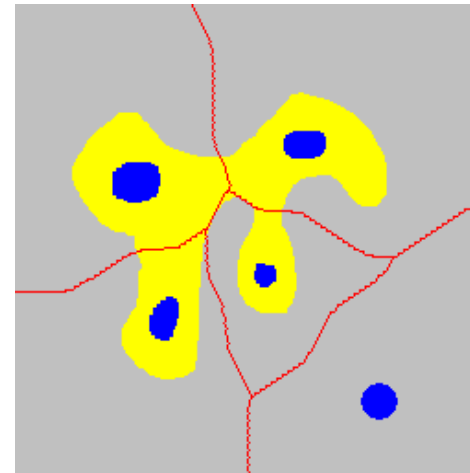
- Le SKIZ géodésique de Y par rapport à X ($Gskiz_X(Y)$) est défini par l'application jusqu'à stabilité :
 - d'un épaissements avec L^C (inversion blue \leftrightarrow rouge),
 - d'un épaissements avec E^C ,
 - d'une intersection avec X
- La zone associée a une composante connexe Y_i de Y est notée $iz_X(Y_i)$.



$$Gskiz_X(Y) = \text{---}$$

$$X = \text{■}$$

$$Y = \text{■}$$



$$skiz(Y) = \text{---}$$

$$X = \text{■}$$

$$Y = \text{■}$$

Segmentation par ligne de partage des eaux (LPE)



■ Squelette (SK)

- Définitions propriétés
- Le squelette et les transformations morphologiques de base
- Configurations de voisinage et les éléments structurants bi-colorés, les transformations en tout ou rien
- Amincissement et épaissement, squelette et amincissement homotopique, Points particuliers du squelette
 - La bissectrice conditionnelle
- Squelette par zone d'influence

(SKIZ)



Segmentation par ligne de partage de

- Approche par écoulement,
- LPE 1D par inondation,
- LPE 2D par inondation,
- Techniques de Marquage
 - Swamping
 - Dynamique des bassins
- LPE hiérarchique
 - Waterfall
 - Dynamique des contours

Ligne de partage des eaux



- La notion de ligne de partage des eaux est **Topographique**.
- Vision Inondation : Supposons que les pôles fondent et que les océans débordent :
Où vont se rencontrer les eaux des différentes mers (du nord, manche, atlantique, méditerranée) ?
 - Les lignes de rencontre constituent **les lignes de partage des eaux**. Par exemple la ligne de partage des eaux entre la mer du nord et la méditerranée passe entre Troyes et Dijon.
 - Les zones envahies par les différentes mers constituent leurs **bassins versant**
 - Les mers constituent les **minimums** des bassins versants.
- Vision Écoulement :
 - Supposons le sol absolument imperméable. Si une goutte d'eau tombe sur un point du relief dans quel océan va-t-elle se jeter ?
 - Si une seule solution : le point appartient à un bassin versant.
 - Sinon il appartient à une ligne de partage des eaux.

Approche par Écoulement en Traitement d'images



- Question : Peut on décrémenter la valeur d'un pixel sans changer l'écoulement ?

3	3	3	5	5	5	10	10	10	10	15	20	20
3	3	3	5	5	5	10	10	10	10	15	20	20
3	3	3	5	5	30	30	30	10	15	15	20	20
3	3	3	5	30	20	20	20	30	15	15	20	20
40	40	40	40	40	20	20	20	40	40	40	40	40
10	10	10	10	40	20	20	20	40	10	10	10	10
5	5	5	5	10	40	20	40	10	10	5	5	5
1	1	3	5	10	15	20	15	10	5	1	0	0
1	1	3	5	10	15	20	15	10	5	1	0	0
1	1	3	5	10	15	20	15	10	5	1	0	0

Grille Initiale

3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	30	30	30	3	3	3	3	3
3	3	3	3	30	1	20	0	30	3	3	3	3
30	30	30	30	1	1	20	0	0	30	30	30	30
1	1	1	1	1	1	20	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	20	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	20	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	20	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	20	0	0	0	0	0	0

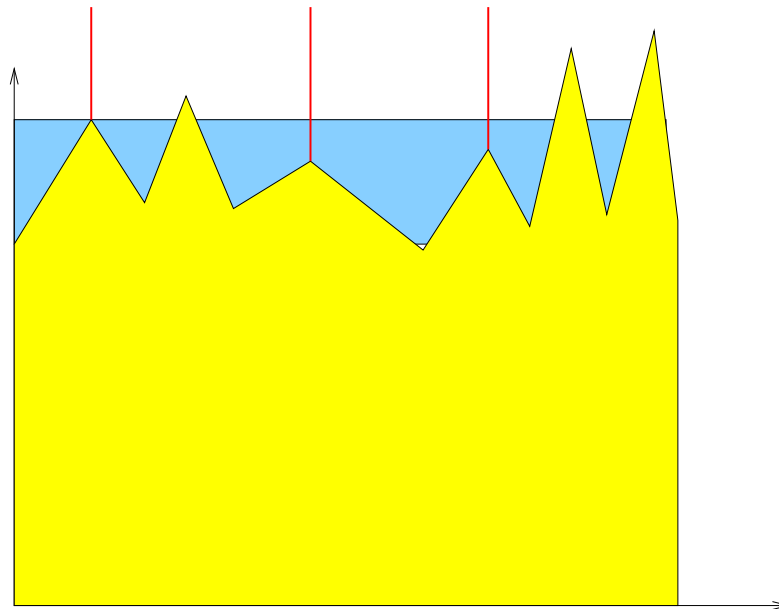
LPE

- Travail de Gille Bertrand et Michel Couprie
- Notion de point Simple (géométrie discrète)
- Remarque : On préserve la valeur minimale le long d'un contour mais pas son profil d'intensité.

LPE 1D par inondation



On suppose **qu'un trou a été percé sur chaque minimum local** et que la surface est inondée à partir de ces trous. Progressivement le niveau de l'eau augmente. Pour empêcher la réunion des eaux provenant des différents trous, **Une digue est construite à chaque point de contact.** Finalement, **l'union de toutes les digues forment la ligne de partage des eaux.**



LPE 2D par inondation (1/4)



- Soient $C(M)$ le bassin associé au minimum M et

$$\begin{cases} T_h(I) &= \{p \in D_I, I(p) \leq h\} \\ C_h(M) &= \{p \in C(M), I(p) \leq h\} = C(M) \cap T_h(I) \end{cases}$$

- X_h l'ensemble des pixels appartenant à un bassin et d'altitude inférieure à h :

$$X_h = \left(\bigcup_{i \in I} C(M_i) \right) \cap T_h(I) = \bigcup_{i \in I} C_h(M_i)$$

- Soit h_{min} l'altitude minimale de I .

- $T_{h_{min}}$ correspond aux minima (aux mers) de l'image I . On a donc :

$$X_{h_{min}} = T_{h_{min}}(I)$$

- Soit Y une composante connexe de $T_{h_{min}+1}(I)$.

LPE 2D par inondation (2/4)

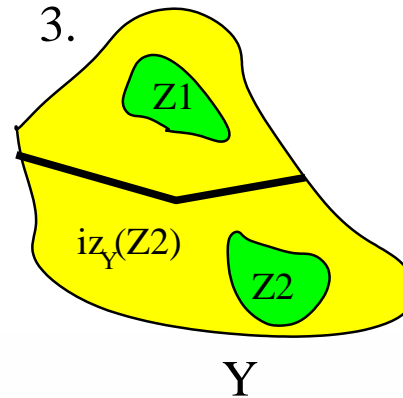
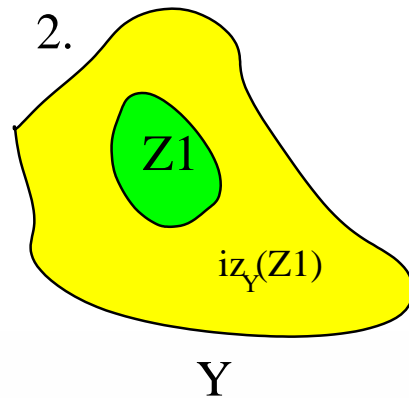
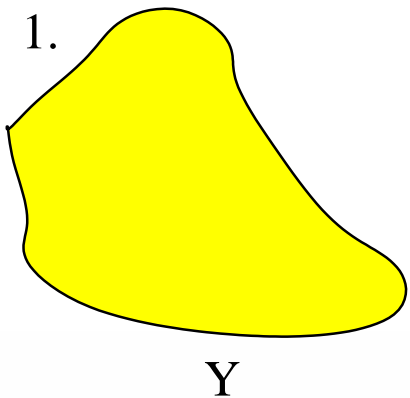


■ Étudions les 3 configurations de $Y \cap X_{h_{min}}$:

1. $Y \cap X_{h_{min}} = \emptyset$: Y est un nouveau minimum d'altitude $h_{min} + 1$.
2. $Y \cap X_{h_{min}} \neq \emptyset$ et est connexe : Y correspond aux pixels du bassin associé au minimum $Y \cap X_{h_{min}}$ et d'altitude inférieure à $h_{min} + 1$.

$$Y = C_{h_{min}+1}(Y \cap X_{h_{min}})$$

3. $Y \cap X_{h_{min}} \neq \emptyset$ et n'est pas connexe. Soient $Z_1 \dots Z_k$ les composantes connexes de $Y \cap X_{h_{min}} \neq \emptyset$. Z_i correspond à un minimum dont le bassin à l'altitude $h_{min} + 1$ est défini par $C_{h_{min}+1}(Z_i) = iz_Y(Z_i)$



LPE 2D par inondation (3/4)



- L'ensemble des pixels appartenant aux bassins et d'altitude inférieure à $h_{min} + 1$ est donc constitué :
 1. Des minima isolés d'altitude $h_{min} + 1$ (cas $Y \cap X_{h_{min}} = \emptyset$).
 2. Des zones d'influence géodésique des minimums de $X_{h_{min}}$ dans $T_{h_{min}+1}$ (cas $Y \cap X_{h_{min}} \neq \emptyset$)

- On a donc :

$$X_{h_{min}+1} = \text{min}_{h_{min}+1} \cup IZ_{T_{h_{min}+1}(I)}(X_{h_{min}})$$

- On a donc une suite d'ensembles définie par :

1. $X_{h_{min}} = T_{h_{min}}(I)$,
2. pour tout $h \in \{h_{min}, \dots, h_{max} - 1\}$

$$X_{h+1} = \text{min}_{h+1} \cup IZ_{T_{h+1}(I)}(X_h)$$

LPE 2D par inondation (4/4)



- $X_{h_{max}}$ contient l'ensemble des bassins.
- L'ensemble des pixels appartenant à une ligne de partage des eaux est défini par $D_I - X_{h_{max}}$.
- Historique (Rapide) :
 - Beucher et Lantuéjoul (1979) : Épaississements avec éléments M et E
 - Meyer (1989) : squeletisation d'images en niveaux de gris
 - Vincent et Soille (1991) : Propagation avec tri des pixels
 - Meyer 1991 : Files d'attentes hiérarchiques

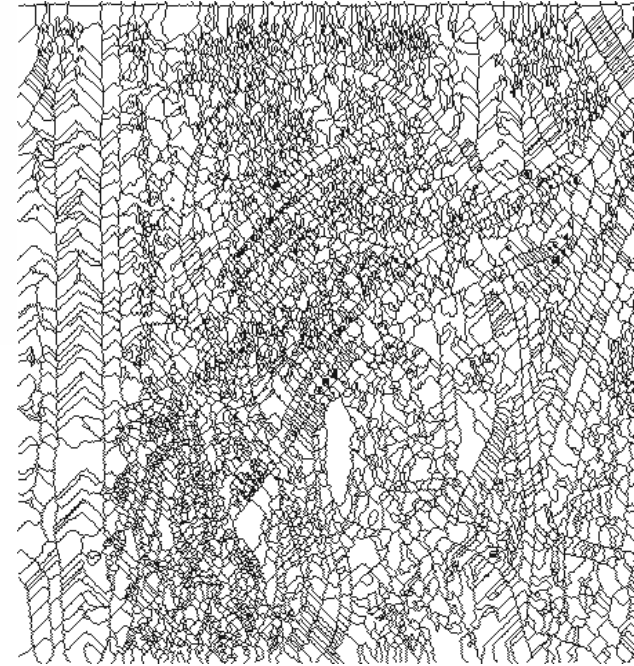
LPE 2D : Exemple



Lenna



Gradient couleur



Lignes de partage des e

LPE : Remarques



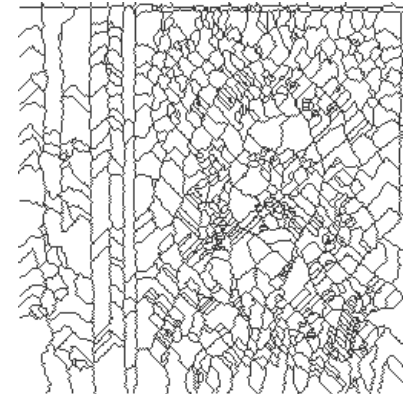
- Propriétés de la LPE
 - Les contours sont généralement bien positionnés
 - Chaque minima induit un bassin \Rightarrow Sur Segmentation.
- Comment lutter contre la sur segmentation ?
 - Techniques de marquages (swamping)
 - suppression de minimums par h minima,
 - Lignes de partage des eaux hiérarchiques



Original



Gradient couleur

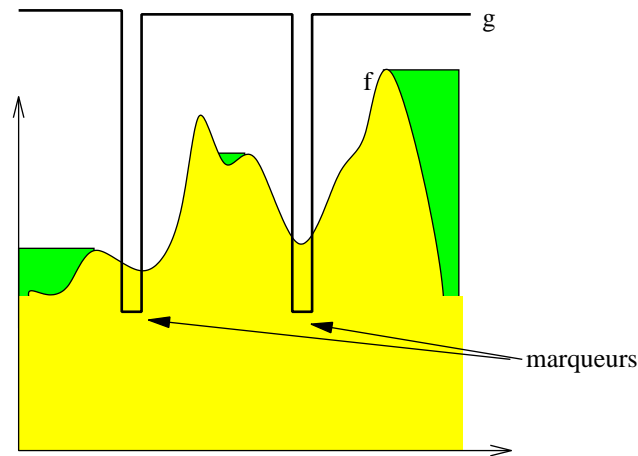


Lignes de partage des eaux

Les techniques de marquage



- Supposons que l'on dispose d'une connaissance a priori sur les zones à segmenter. Soit M l'ensemble des zones ne devant pas posséder de contours internes.
- On définit la fonction g par :
$$g(p) = \begin{cases} h_{max} & \text{si } p \notin M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
- On construit la ligne de partage des eaux sur l'érosion géodésique de g par $\min(f, g)$ ($\varphi^{Rec}(g : g \wedge f)$)



Simplification de LPE & Dynamique des bassins

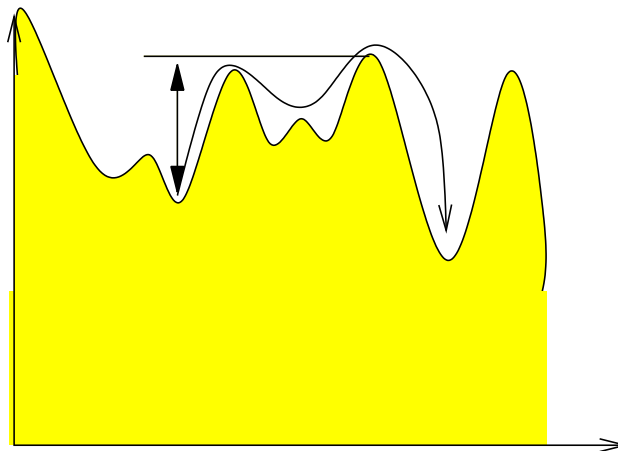


■ Définition : Dynamique des bassins.

Soit M un minima de f . La dynamique de M est le nombre :

$$\min_{\gamma} \{ \max_s \{ f(\gamma(s)) - f(\gamma(0)) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, f(\gamma(1)) < f(\gamma(0)), \gamma(0) \in M \} \}$$

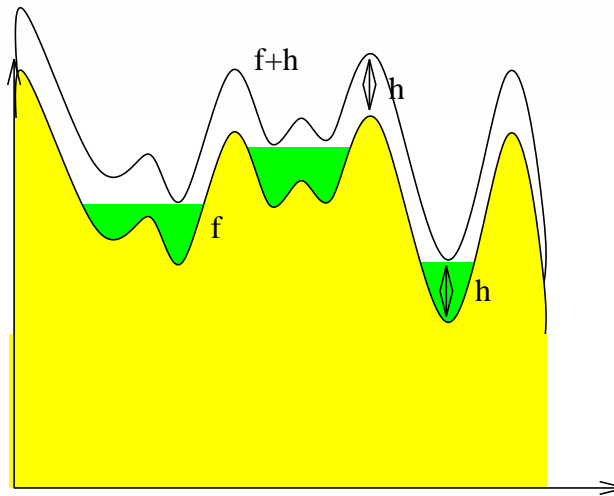
qui correspond à l'altitude minimal qu'il faudra monter pour pouvoir descendre plus bas que l'altitude de M .



Suppression des bassins



- La suppression des bassins de dynamique inférieure à h est réalisé en effectuant la LPE sur l'érosion géodésique de $f(x) + h$ sur $f(x)(\varphi^{Rec}(f + h : f))$.



- L'érosion remplit les bassins jusqu'à une hauteur h . Tous les bassins de dynamique inférieure à h sont supprimés.

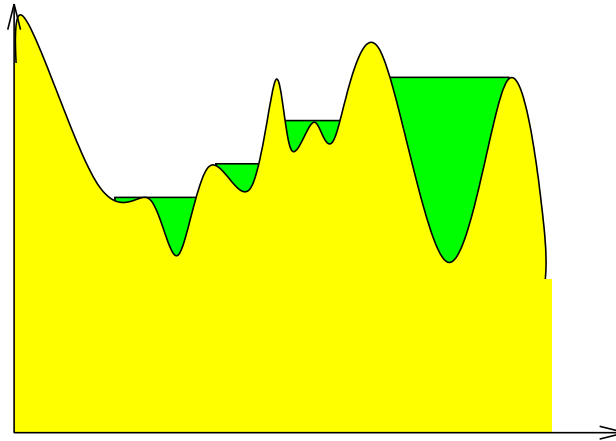
LPE Hiérarchique : Waterfall



- Soit f une fonction (ou une image) et M l'ensemble de ses pixels watersheds. On construit la fonction g définie par :

$$g(p) = \begin{cases} f(p) & \text{si } p \in M \\ h_{max} & \text{sinon} \end{cases}$$

- L'érosion géodésique de g sur f supprime les minima les moins significatifs.



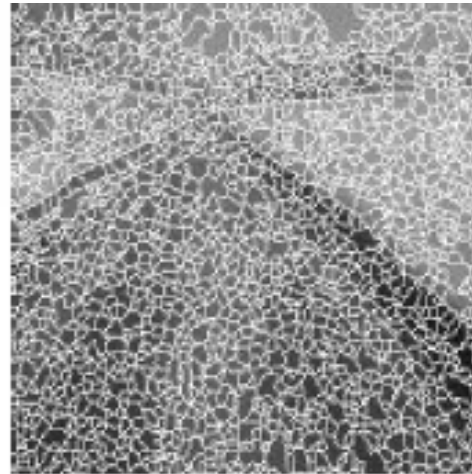
Waterfall : Exemple



- extrait de Fast Implementation of Waterfall Based on Graphs (B. Marcotegui and S. Beucher, 2005)



Original



Watershed



Waterfall (iter. 1)



Waterfall (iter. 2)



: Waterfall (iter. 3)

Dynamique des contours



- Auteur Laurent Najman & Michel Schmitt
- Soit a le point le plus bas d'un contour entre 2 bassins.
- Soit

$$Bas(a) = \{b \in D_I \mid \exists \gamma, \gamma(0) = a, \gamma(1) = b \text{ et } f(\gamma(s)) < f(a) \forall s \in [0, 1]\}$$

L'ensemble des points pouvant être atteint à partir de a sans jamais remonter au dessus de a .

- B_1, \dots, B_n l'ensemble des composantes connexes de $Bas(a) = \bigcup_{i=1}^n B_i$.
- On définit la dynamique de a par :

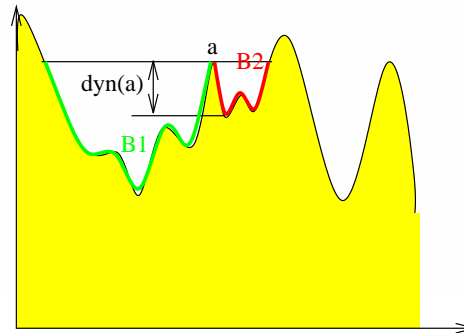
$$dyn(a) = \min_i \max_{b_i \in B_i} (f(a) - f(b_i))$$

- $dyn(a)$ correspond à la plus haute valeur h pour laquelle a est un pixel watershed de $\varphi^{Rec}(f + h : f)$.

Dynamique des contours : Illustration & Algorithme



■ Illustration :



■ Algorithme :

- Effectuer une inondation sur l'ensemble des bassins
- Pour chaque contour inonde \mathcal{C} :

$$dyn(\mathcal{C}) = pass_value(\mathcal{C}) - MAX(Profondeur(B_1), Profondeur(B_2))$$

avec B_1, B_2 bassins bordant \mathcal{C} , $pass_value(\mathcal{C})$ altitude minimale de \mathcal{C} .

■ Positionner

$$Profondeur(B_1 \cup B_2) = \min(Profondeur(B_1), Profondeur(B_2))$$

Dynamique des contours : Applications & Problèmes



■ Applications :

- Fusionner tous les bassins adjacents par un contour de dynamique inférieure à ϵ .
- Trier les contours par ordre croissant de dynamique et les supprimer si les bassins satisfont un critère de fusion (test statistique sur les couleurs des pixels contenus dans les bassins).

■ Problèmes :

- La valeur $pass_value(\mathcal{C})$ est sensible au bruit (comme tout opérateur min)..
- les contours initiaux sont courts
- $\Rightarrow pass_value(\mathcal{C})$ peu significatif même sans bruit.

Dynamique des contours : Améliorations

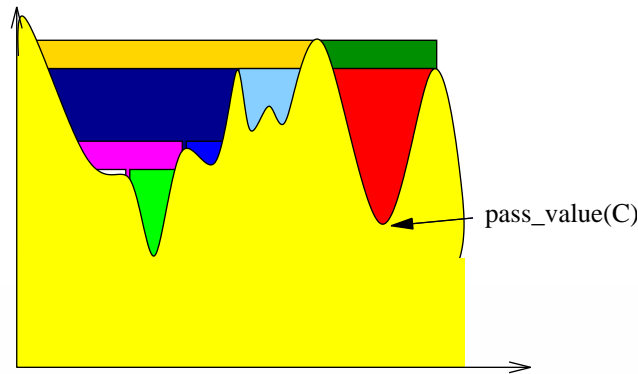


- Auteur Luc Brun. Effectuer un waterfall sur le profil d'intensité de \mathcal{C} ,
- Calculer le volume de chaque bassin inondé,
- Soit $b_1 \dots, b_n$ l'ensemble des bassins inondés.
- Positionner $pass_value(\mathcal{C})$ à :

$$pass_value(\mathcal{C}) = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} Profondeur(b_i), | \\ Volume(b_i) = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} Volume(b_j) \end{array} \right\}$$

La valeur de passage est la profondeur du bassin de volume maximal.

- Fusionner les contours de plus faible dynamique et mettre à jour les dynamiques des contours restants.



Dynamique des contours améliorée : Exemple



Lenna



Itération 1



Itération 5



Itération 9



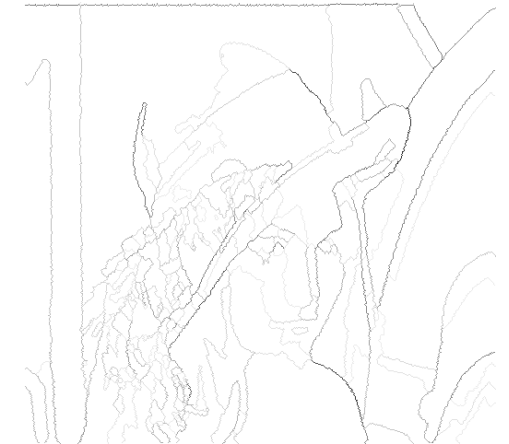
Itération 13



Itération 17



Itération 21



Itération 25