Segmentation, Graphes et structures hiérarchiques

Luc Brun

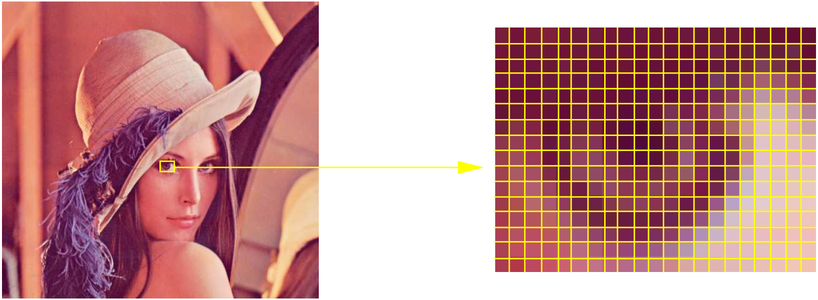
Groupe de Recherche en Informatique,
Image, Automatique et Instrumentation
de Caen (GREYC)

ORASIS 2007

Plan

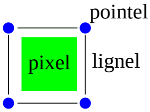
Image

- Une image est composée de pixels.



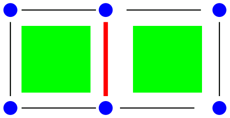
Pixel

- Pixel



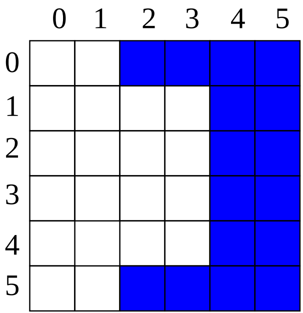
Pixel

- Pixel
- 4 Voisins :



Régions

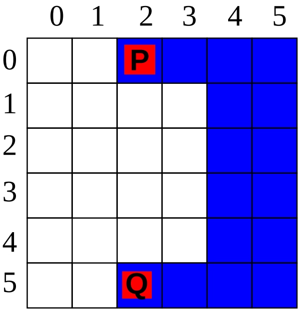
- Régions



Régions

- Régions

$$C = P_1 . \ldots . P_n,$$
$$\begin{cases} P_1 & = & P \\ P_n & = & Q \\ P_i & \in & V_x(P_{i-1}), \forall i \in \{2, \ldots, n\} \end{cases}$$

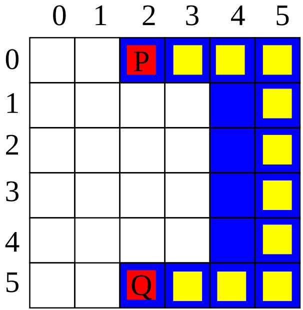


Régions

- Régions

$$C = P_1 \ldots . P_n,$$

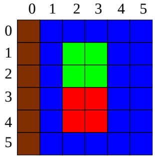
$$\begin{cases} P_1 & = & P \\ P_n & = & Q \\ P_i & \in & V_x(P_{i-1}), \forall i \in \{2, \ldots, n\} \end{cases}$$



Partition

- Partition : $\mathcal{P} = \{R_1, \ldots, R_n\}$

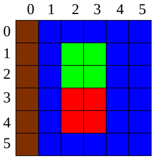
$$\forall i \neq j \; R_i \cap R_j = \emptyset$$
$$P = \bigsqcup_{i=1}^{n} R_i,$$



Partition

- Partition : $\mathcal{P} = \{R_1, \ldots, R_n\}$

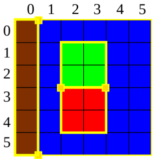
$$\forall i \neq j \; R_i \cap R_j = \emptyset$$
$$P = \bigsqcup_{i=1}^{n} R_i,$$



- Frontières : contours + noeuds

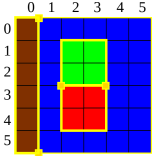
Contour : Séquence maximale de lignels / pointels entre deux régions.

Noeud : Intersection de segments



Adjacence de régions

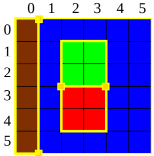
- Deux régions sont adjacentes si elles sont bordés par un coutour commun.



1 contour

Adjacence de régions

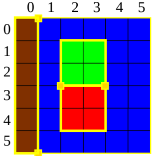
- Deux régions sont adjacentes si elles sont bordés par un coutour commun.



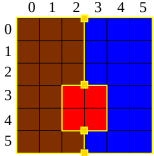
1 contour

Adjacence de régions

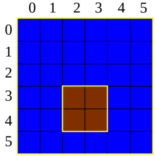
- Deux régions sont adjacentes si elles sont bordés par un coutour commun.
- Les régions ■ et ■ sont adjacentes dans les trois cas.



1 contour



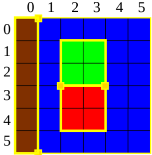
2 contours



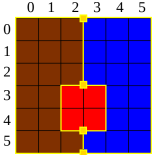
inclusion

Adjacence de régions

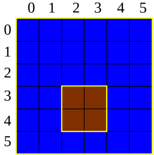
- Deux régions sont adjacentes si elles sont bordés par un coutour commun.
- Les régions ■ et ■ sont adjacentes dans les trois cas.



1 contour



2 contours



inclusion

- La fusion de deux régions adjacentes est une région (connexe).

Segmentation et Partitions

- Segmentation : Définition d'une partition $\mathcal{P} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ vérifiant un certain critère :
  - Homogénéité de chaque région
    $$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ P(R_i) = vrai,$$
  - Minimisation d'une énergie :
    $$\mathcal{P} = argmin_{P \in \mathbb{P}} E(P)$$
  - ...

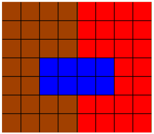
Les méthodes ascendantes

1. Définir une partition initiale $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$
2. Sélectionner des ensembles de régions adjacentes
3. Fusionner chaque ensemble en une seule région.
4. Tester un critère d'arrêt.

- Codage de la partition :
  - Graphes d'adjacences de régions,
  - Graphes duaux,
  - Cartes combinatoires. . ..

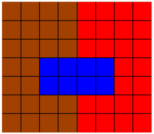
Le Graphe d'adjacence de régions

- $G = (V, E)$: Un graphe simple
  - Sans boucles, 
  - sans arêtes doubles. 



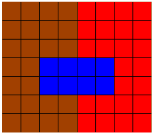
Le Graphe d'adjacence de régions

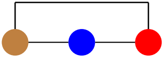
- $G = (V, E)$: Un graphe simple
  - V ensemble des sommets. Un sommet par région.



Le Graphe d'adjacence de régions

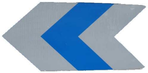
- $G = (V, E)$: Un graphe simple
  - V ensemble des sommets. Un sommet par région.
  - E ensemble des arêtes. Une arête par relation d'adjacence entre régions.





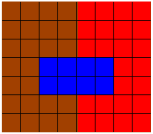
Limites des graphes simples

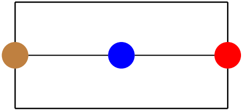
- Soit $G = (V, E)$,
  - $e = (u, v) \in E \Rightarrow R_u$ et R_v ont au moins une frontière commune.
  - $\Leftrightarrow R_u$ et R_v peuvent être fusionnées.



Graphes duaux : Définition

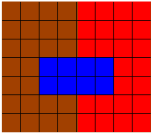
- Modèle des graphes duaux : $(G, \overline{G})$
- $G = (V, E)$ non simple,

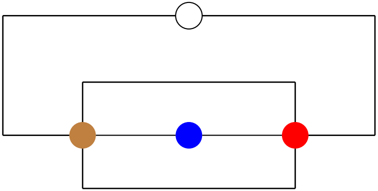




Graphes duaux : Définition

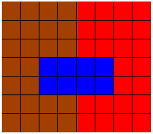
- Modèle des graphes duaux : $(G, \overline{G})$
- $G = (V, E)$ non simple,
  - $\bigcirc$ code l'extérieur de l'image

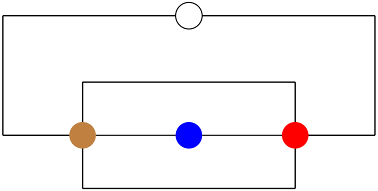




Graphes duaux : Définition

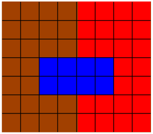
- Modèle des graphes duaux : $(G, \overline{G})$
- $G = (V, E)$ non simple,
- $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$

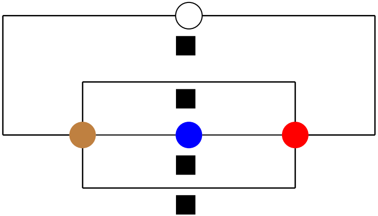




Graphes duaux : Définition

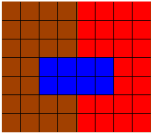
- Modèle des graphes duaux : $(G, \overline{G})$
- $G = (V, E)$ non simple,
- $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$
  - $\overline{V}$: un sommet de $\overline{G}$ par face de G.

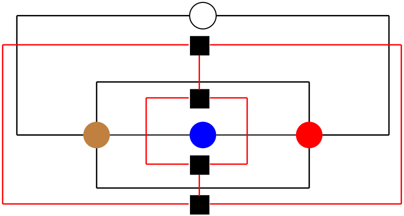




Graphes duaux : Définition

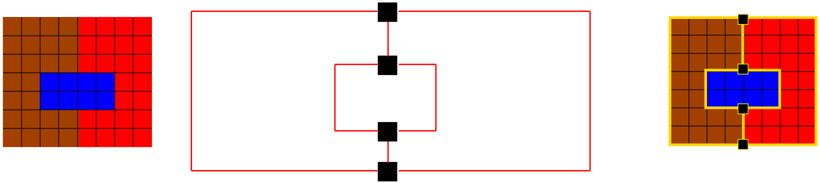
- Modèle des graphes duaux : $(G, \overline{G})$
- $G = (V, E)$ non simple,
- $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$
  - $\overline{V}$: un sommet de $\overline{G}$ par face de G.
  - $\overline{E}$: chaque $\overline{e} \in \overline{E}$ coupe une et une seule arête de E.





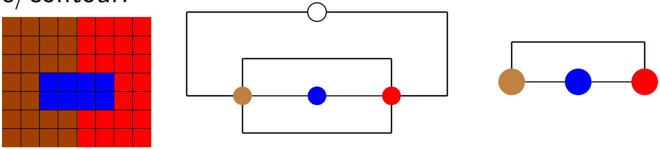
Graphe duaux : propriétés

- Si les sommets de G codent les régions alors les sommets de $\overline{G}$ codent les intersections de frontières (et vice versa).
- Les arêtes codent les frontières de la partition.



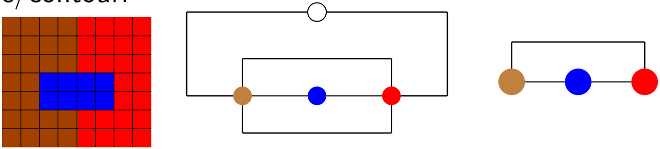
Graphes duaux/Graphes simples

- Les graphes duaux fournissent la correspondance arête/contour.



Graphes duaux/Graphes simples

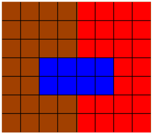
- Les graphes duaux fournissent la correspondance arête/contour.

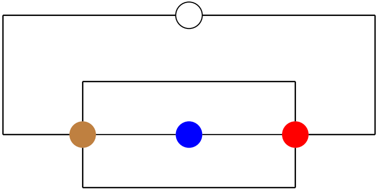


- En revanche :
  - ☹ Les graphes duaux nécessitent de stocker et mettre à jour deux graphes (G et $\overline{G}$).
  - ☹ Ils ne permettent pas de coder les relations d'inclusions.

Cartes Combinatoires : Les arêtes

- $G = (\mathcal{D}, \sigma, \alpha)$

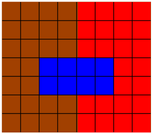


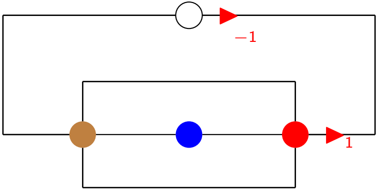


- Chaque arête est découpée en deux demis arêtes appelées brins.

Cartes Combinatoires : Les arêtes

- $G = (\mathcal{D}, \sigma, \alpha)$

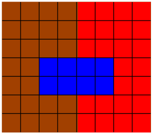


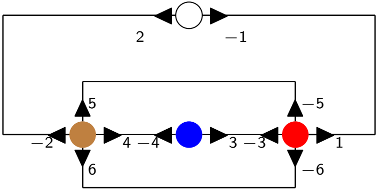


- Les deux brins d'une même arête sont liés par une involution $\alpha : \alpha(1) = -1, \alpha(-1) = 1$

Cartes Combinatoires : Les arêtes

- $G = (\mathcal{D}, \sigma, \alpha)$

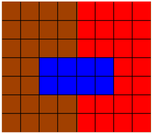


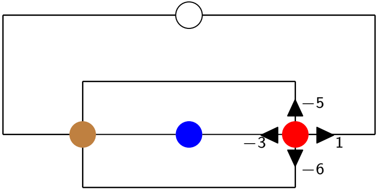


$$\mathcal{D} = \{-6, \ldots, -1, 1, \ldots, 6\}$$
$$\forall b \in \mathcal{D}\ \alpha(b) = -b$$

$$\alpha = (1, -1)(2, -2)(3, -3)(4, -4)(5, -5)(6, -6)$$

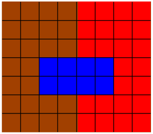
Les sommets

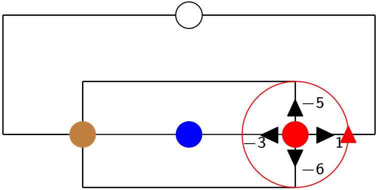




- Les sommets sont codés par les cycles de σ.

Les sommets

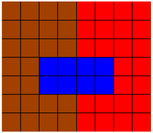


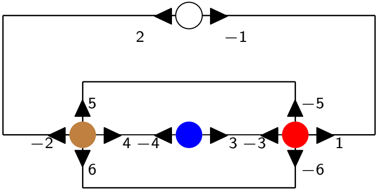


- $\sigma^*(b)$ correspond à la suite de brins rencontrés en tournant dans le sens positif autour du sommet contenant b.

$$\sigma^*(1) = (1, -5, -3, -6)$$

Les sommets



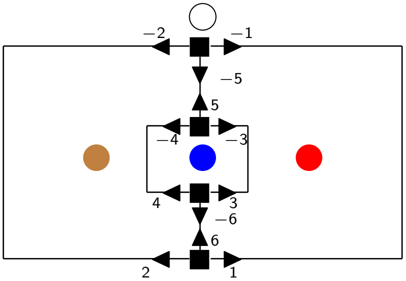


$$\sigma = (1, -5, -3, -6)(6, 4, 5, -2)(2, -1)(3, -4)$$

Calcul du dual

- Si $G = (\mathcal{D}, \sigma, \alpha)$ alors $\overline{G} = (\mathcal{D}, \varphi = \sigma \circ \alpha, \alpha)$.
- Les cycles de φ codent les faces de la carte duale (et donc la carte duale).

$$\varphi = (-2, -1, -5)(-4, 5, -3)(4, 3, -6)(2, 6, 1)$$



Cartes Combinatoires : Bilan

- Codage implicite du dual : On travaille avec un seul graphe

Cartes Combinatoires : Bilan

- Codage implicite du dual : On travaille avec un seul graphe
- On code explicitement l'orientation

Cartes Combinatoires : Bilan

- Codage implicite du dual : On travaille avec un seul graphe
- On code explicitement l'orientation
- Associées à un modèle géométrique les cartes permettent :
  - De coder une partition en alternant découpes/fusions
  - De coder les relations d'inclusions.

http ://www.greyc.ensicaen.fr/∼luc/ARTICLES/ecole_d_ete2.odp

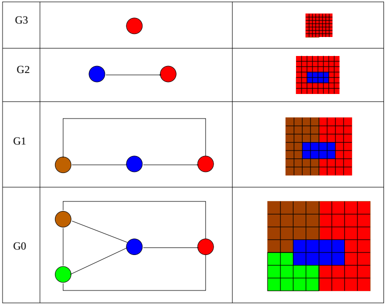
Les modèles hiérarchiques

- Fournir une partition impose un choix

- Toutes les informations utiles doivent se trouver dans une partition ☹
- Fournir non pas une partition mais une pile de partitions successivement réduites. ☺

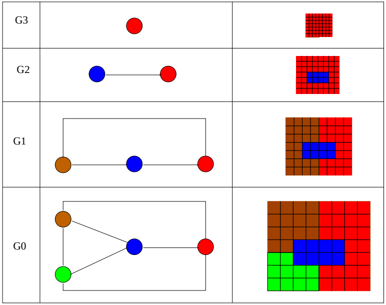
Pyramides Irrégulières

- Pile de graphes $(G_0, G_1, \ldots, G_n)$ successivement réduits.
- G_0 : représente le maillage des pixels ou une segmentation initale



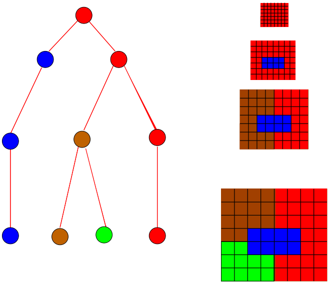
Pyramides Irrégulières

- Pile de graphes $(G_0, G_1, \ldots, G_n)$ successivement réduits.
- G_0 : représente le maillage des pixels ou une segmentation initale



- $G_0, \ldots, G_n$ ne sont que des résultats.

Relations hiérarchiques



- Fenêtre de réduction
  - $v \in V_i$ provient de la fusion de sommets adjacents définis dans G_{i-1}.

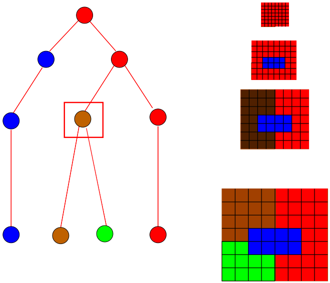
$$FR_i(v) = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V_{i-1}$$

Relations hiérarchiques

- Fenêtre de réduction
  - $v \in V_i$ provient de la fusion de sommets adjacents définis dans G_{i-1}.

$$FR_i(v) = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V_{i-1}$$

    - $v_i \in FR(v)$ est un fils de v,
    - v est le père des v_i.

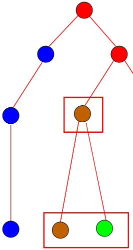


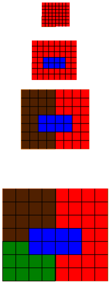
Relations hiérarchiques

- Fenêtre de réduction
  - $v \in V_i$ provient de la fusion de sommets adjacents définis dans G_{i-1}.

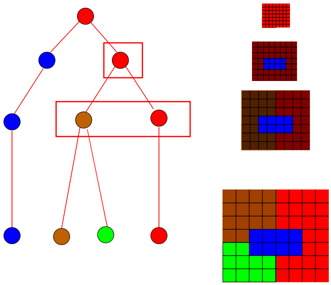
$$FR_i(v) = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V_{i-1}$$

  - $v_i \in FR(v)$ est un fils de v,
  - v est le père des v_i.





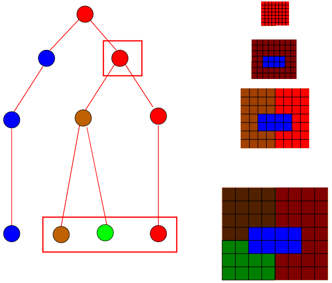
Relations hiérarchiques



- Champ récepteur : cloture transitive de la relation père/fils.
  - $w \in CR_i(v)$ est un descendant de v,
  - v est un ancêtre de w.

Relations hiérarchiques

- Champ récepteur : cloture transitive de la relation père/fils.
  - $w \in CR_i(v)$ est un descendant de v,
  - v est un ancêtre de w.

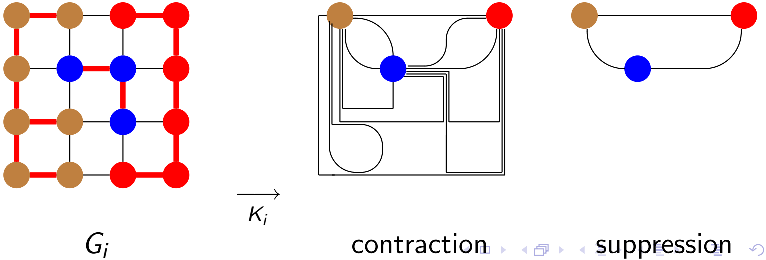


Construction de pyramides irrégulières

- Pyramides de Graphes simples :

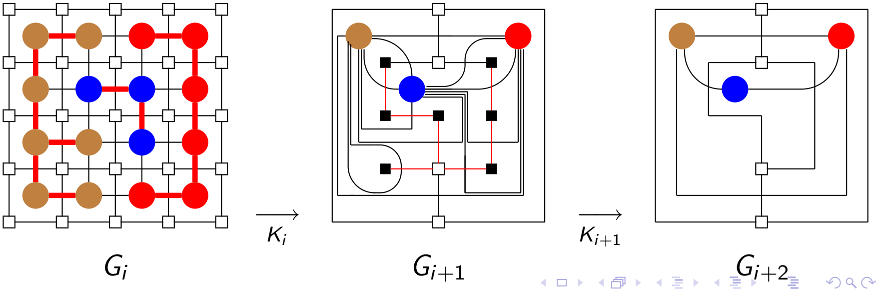
$$G_i \longrightarrow G_{i+1} \text{ par fusion de sommets}$$

1. Définition de $K_i \subset E_i$
2. Contraction de K_i
3. Suppression de toutes les boucles et arêtes doubles.



Construction de pyramides irrégulières

- Pyramides de Graphe duaux et de cartes combinatoires
  1. Définition de K_i : Noyau de contraction
  2. Contraction de K_i
  3. Suppression de certaines boucles et de certaines arêtes doubles. K_{i+1} : Noyau de suppression



Pyramides Combinatoires et graphes

- Une seule carte $G_i = (\mathcal{D}_i, \sigma_i, \alpha_i)$ plutôt que deux graphes $(G_i, \overline{G_i})$à chaque niveau.

Pyramides Combinatoires et graphes

- Une seule carte $G_i = (\mathcal{D}_i, \sigma_i, \alpha_i)$ plutôt que deux graphes $(G_i, \overline{G_i})$à chaque niveau.
- Problèmes des fenêtres de réductions :

$$RF_i(v) = \{v_1, \dots, v_n\}$$

  - ⚠ un sommet de G_i est défini par un cycle $\sigma_i^*(b), b \in \mathcal{D}_i$
  - $\Rightarrow$ Pas de codage explicite des sommets.

Pyramides Combinatoires et graphes

- Une seule carte $G_i = (\mathcal{D}_i, \sigma_i, \alpha_i)$ plutôt que deux graphes $(G_i, \overline{G_i})$à chaque niveau.
- Problèmes des fenêtres de réductions :
  - ⚠ un sommet de G_i est défini par un cycle $\sigma_i^*(b), b \in \mathcal{D}_i$
  - $\Rightarrow$ Pas de codage explicite des sommets.
- Deux solutions :

Pyramides Combinatoires et graphes

- Une seule carte $G_i = (\mathcal{D}_i, \sigma_i, \alpha_i)$ plutôt que deux graphes $(G_i, \overline{G_i})$à chaque niveau.
- Problèmes des fenêtres de réductions :
  - ⚠ un sommet de G_i est défini par un cycle $\sigma_i^*(b), b \in \mathcal{D}_i$
  - $\Rightarrow$ Pas de codage explicite des sommets.
- Deux solutions :
  - Créer des étiquettes de sommets ☹

Pyramides Combinatoires et graphes

- Une seule carte $G_i = (\mathcal{D}_i, \sigma_i, \alpha_i)$ plutôt que deux graphes $(G_i, \overline{G_i})$à chaque niveau.
- Problèmes des fenêtres de réductions :
  - ⚠ un sommet de G_i est défini par un cycle $\sigma_i^*(b), b \in \mathcal{D}_i$
  - $\Rightarrow$ Pas de codage explicite des sommets.
- Deux solutions :
  - Créer des étiquettes de sommets ☹
  - Parler le langage des cartes ☺

Chemins/Séquences de connexions

- Fenêtres de réductions : Chemins de connexions.

$$\forall b \in \mathcal{D}_i,\ CW_i(b) = b_1 . \dots . b_p \in G_{i-1}$$

  - Graphes : $v \in V_i, RF_i(v) = \{v_1, \dots, v_p\} \subset V_{i-1}$

Chemins/Séquences de connexions

- Fenêtres de réductions : Chemins de connexions.

$$\forall b \in \mathcal{D}_i,\ CW_i(b) = b_1 \ldots . . b_p \in G_{i-1}$$

  - Graphes : $v \in V_i, RF_i(v) = \{v_1, \ldots, v_p\} \subset V_{i-1}$
- Champs récepteurs : Séquence de connexions

$$\forall b \in \mathcal{D}_i,\ SC_i(b) = b_1 \ldots . . b_q \in G_0$$

  - Graphes : $v \in V_i, CR_i(v) = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset V_0$

Chemins/Séquences de connexions

- Fenêtres de réductions : Chemins de connexions.

$$\forall b \in \mathcal{D}_i,\ CW_i(b) = b_1.\ldots.b_p \in G_{i-1}$$

  - Graphes : $v \in V_i, RF_i(v) = \{v_1, \ldots, v_p\} \subset V_{i-1}$
- Champs récepteurs : Séquence de connexions

$$\forall b \in \mathcal{D}_i,\ SC_i(b) = b_1.\ldots.b_q \in G_0$$

  - Graphes : $v \in V_i, CR_i(v) = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset V_0$
- ⚠ Les chemins et séquences de connexions sont des ensembles ordonnés (des suites).

Codage implicite

- État : **état**$(i) \in \{$contraction, suppression$\}$
- Niveau :

$$\textbf{niveau}(b) = \max\{i \in \{1, \ldots, n+1\} \mid b \in \mathcal{D}_{i-1}\}.$$

$b \in \mathcal{D}_{niveau(b)-1}, b \notin \mathcal{D}_{niveau(b)}$

- Les suppressions et contractions ne font que supprimer des brins

$$\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n-1} \subset \cdots \subset \mathcal{D}_0$$

Codage implicite

- État : **état**$(i) \in \{$contraction, suppression$\}$
- Niveau :

$$\textbf{niveau}(b) = \max\{i \in \{1, \ldots, n+1\} \mid b \in \mathcal{D}_{i-1}\}.$$

$b \in \mathcal{D}_{niveau(b)-1}, b \notin \mathcal{D}_{niveau(b)}$

- Les suppressions et contractions ne font que supprimer des brins

$$\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n-1} \subset \cdots \subset \mathcal{D}_0$$

- En terme d'implémentation :
  - **état** : tableau de bits de taille n.
  - **niveau** :tableau d'entier de taille $|\mathcal{D}_0|$.

Codage Implicite : Définition

- Codage explicite $P = (G_0, \ldots, G_n)$
- Codage implicite : $P = (G_0, \textbf{état}, \textbf{niveau})$.
  - Toute carte G_i peut se retrouver à partir du codage implicite.
  - Plus de restriction sur le nombre de niveaux

Propriétés

G_0 : grille 4 connexe.

- Champ récepteur de $\sigma_i^*(b) = (b_1, \ldots, b_p)$ à partir des $SC_i(b_j)$.
  - Ensemble des pixels, lignels, pointels d'une région.
  - Frontière d'une région.
- contours : $\partial SC_i(b) \subset SC_i(b)$: séquence de lignels/pointels
- Codage efficace des relations d'inclusions.

Complexités

- Calcul d'une carte : $\mathcal{O}$ (taille des frontières),

Complexités

- Calcul d'une carte : $\mathcal{O}$ (taille des frontières),
- Calcul de toutes les cartes : $\mathcal{O}(\mathcal{D}_0) \approx \mathcal{O}(|I|)$

Complexités

- Calcul d'une carte : $\mathcal{O}$ (taille des frontières),
- Calcul de toutes les cartes : $\mathcal{O}(\mathcal{D}_0) \approx \mathcal{O}(|I|)$
- Parcours d'un contour : $\mathcal{O}$ (taille (en lignels) du contour)

Complexités

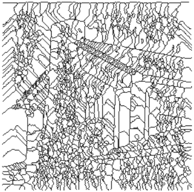
- Calcul d'une carte : $\mathcal{O}$ (taille des frontières),
- Calcul de toutes les cartes : $\mathcal{O}(\mathcal{D}_0) \approx \mathcal{O}(|I|)$
- Parcours d'un contour : $\mathcal{O}$ (taille (en lignels) du contour)
- Relations d'inclusions $\mathcal{O}(|\sigma_i^*(b)|)$.

Récapitulatif

	adjacence	contours	inclusions	hiérarchie
Pyr. Graphes Simples	Oui	Non	Non	Oui
Pyr. Graphes Duaux	Oui	Oui	calcul global ?	Oui
Pyr. Combinatoires	Oui	Oui	calcul local	Oui

Application 1 : Watershed hiérarchique

Image

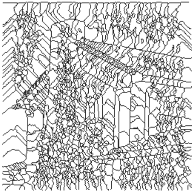


LPE

- Watershed hiérarchique :
  1. Calculer la LPE
  2. valuer l'importance de chaque contour
     2.1 valeur minimale du gradient sur le contour...
  3. Trier les contours :
     - supprimer les contours les moins significatifs.
     - Examiner les fusions de régions par ordre croissant d'importance des contours.

Application 1 : Watershed hiérarchique

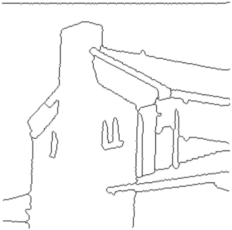
Image



LPE

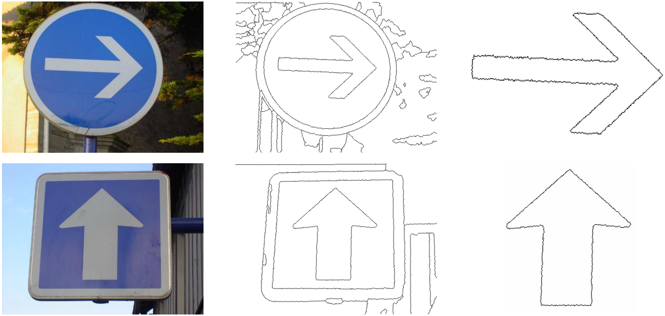
Dynamiques

- Améliorations :
  1. Prise en compte de l'évolution de la partition
     - codage implicite
  2. Valuation robuste des contours.
     - Plongement géométrique des brins.

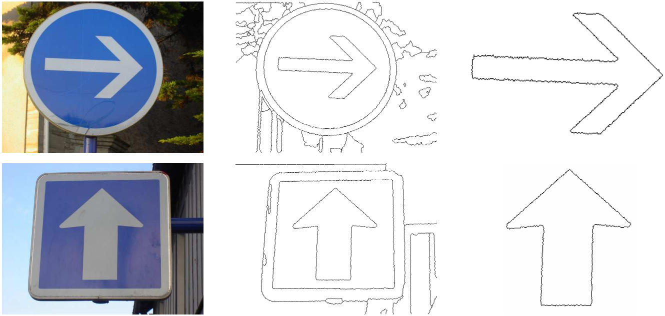


Segmentation

Application 2 : inclusions



Application 2 : inclusions



- Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement.